

Die Abstraktion der Schwanzlänge des Hundes

Prof. Dr. Sonja Prohaska und Dr. Marc Hellmuth

Interdisziplinäres Zentrum für Biologie und Informatik
Universität Leipzig

2. DEZEMBER 2010

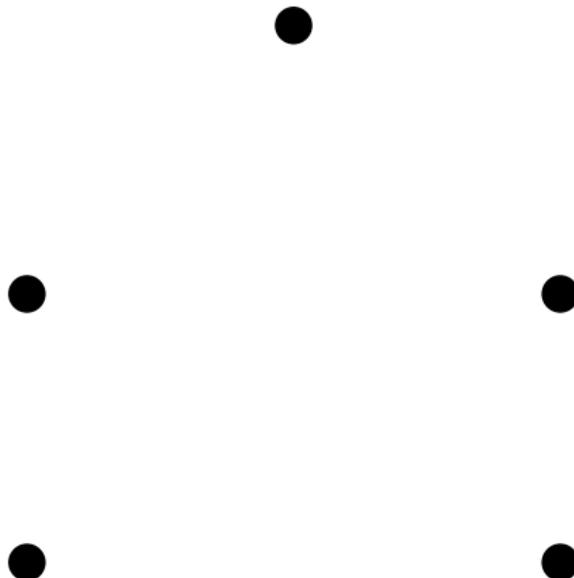
Was ist *diskrete* Mathematik?

- Diskrete Mathematik beschäftigt sich mit "Dingen" die man abzählen kann.
- Bsp: Kombinatorik, Kodierungstheorie, Spieltheorie, ... ,
Graphentheorie
- Diskrete Mathematik ist recht alt, aber sie stand lange im Schatten der "kontinuierlichen" Mathematik.
- Erst in der 2.Hälfte des 20. Jh entstand durch die Entwicklung der schnellen digitalen Datenverarbeitung von Computern (die systembedingt mit diskreten Zuständen arbeiten) ein neuer "Hype".

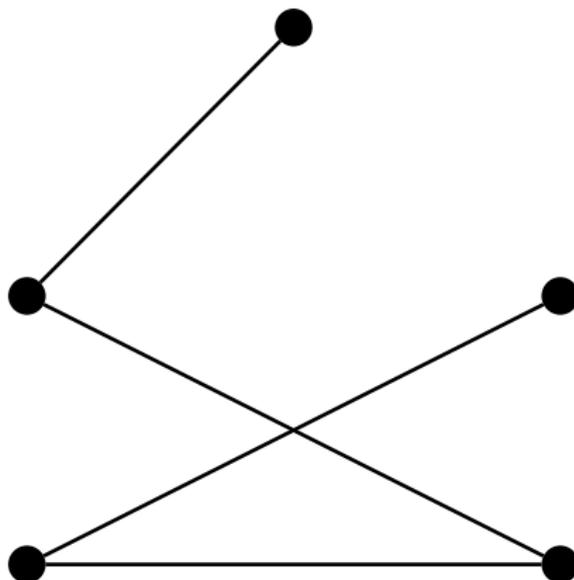
Graphentheorie (Begründet durch Leonhard Euler (etwa 1735))

⇒ Was ist ein Graph?

Was ist ein Graph?

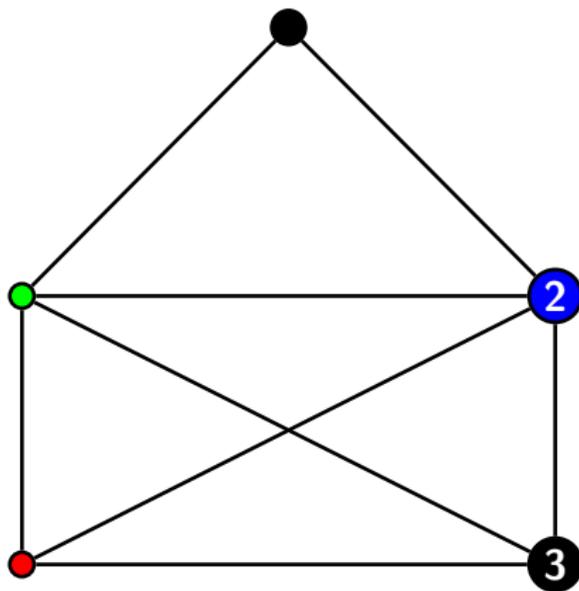


Was ist ein Graph?



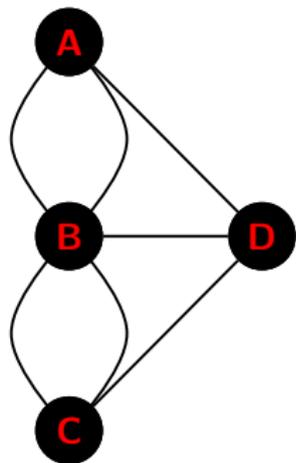
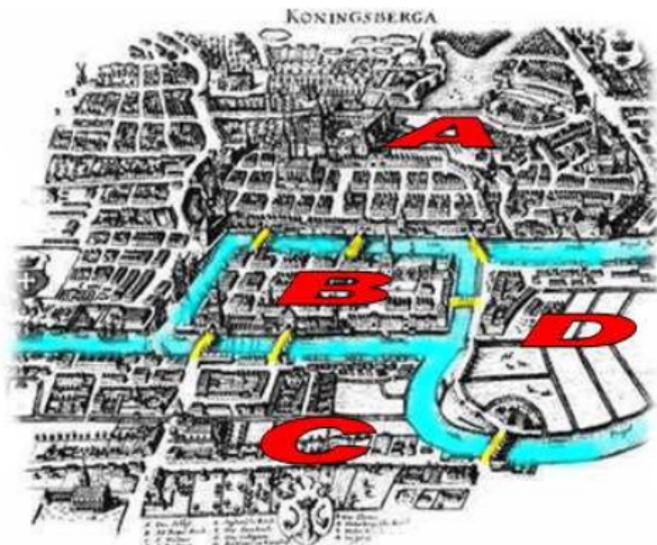
Was ist ein Graph?

Das Haus vom Nikolaus



Graphentheoretische Probleme

Das Königsberger Brückenproblem ¹

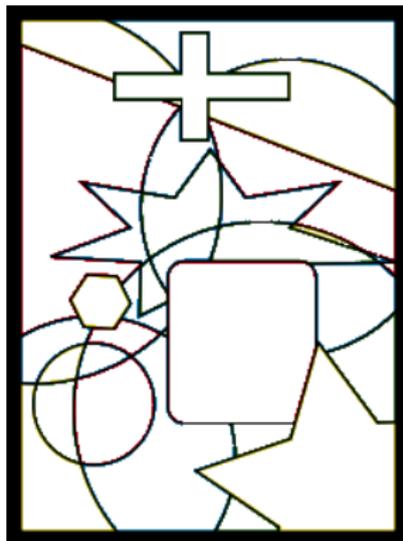


¹Gelöst von Leonhard Euler, 1735

Graphentheoretische Probleme

Das ?-Farben Problem ²

Wieviel Farben benötigt man, um die Flächen einer Karte so zu färben, dass benachbarte Flächen nicht dieselbe Farbe haben?



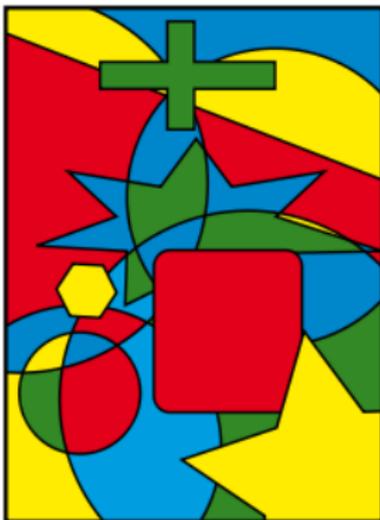
² Vermutung aufgestellt von Francis Guthrie, 1852.

Gelöst von Kenneth Appel and Wolfgang Haken 1976 mit Hilfe von Computern.

Graphentheoretische Probleme

Das 4-Farben Problem²

Wieviel Farben benötigt man, um die Flächen einer Karte so zu färben, dass benachbarte Flächen nicht dieselbe Farbe haben?



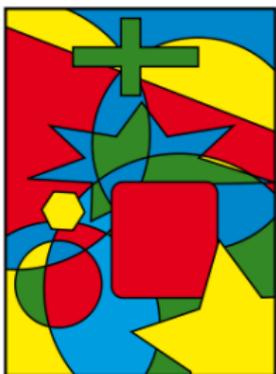
² Vermutung aufgestellt von Francis Guthrie, 1852.

Gelöst von Kenneth Appel and Wolfgang Haken 1976 mit Hilfe von Computern.

Graphentheoretische Probleme

Das 4-Farben Problem ²

Wieviel Farben benötigt man, um die Flächen einer Karte so zu färben, dass benachbarte Flächen nicht dieselbe Farbe haben?

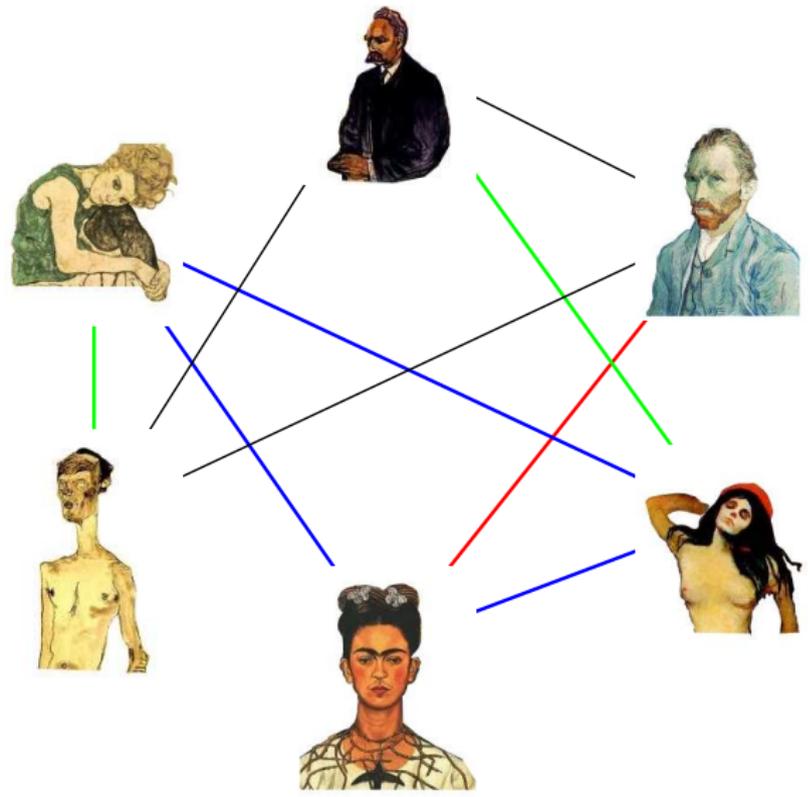


² Vermutung aufgestellt von Francis Guthrie, 1852.

Gelöst von Kenneth Appel and Wolfgang Haken 1976 mit Hilfe von Computern.

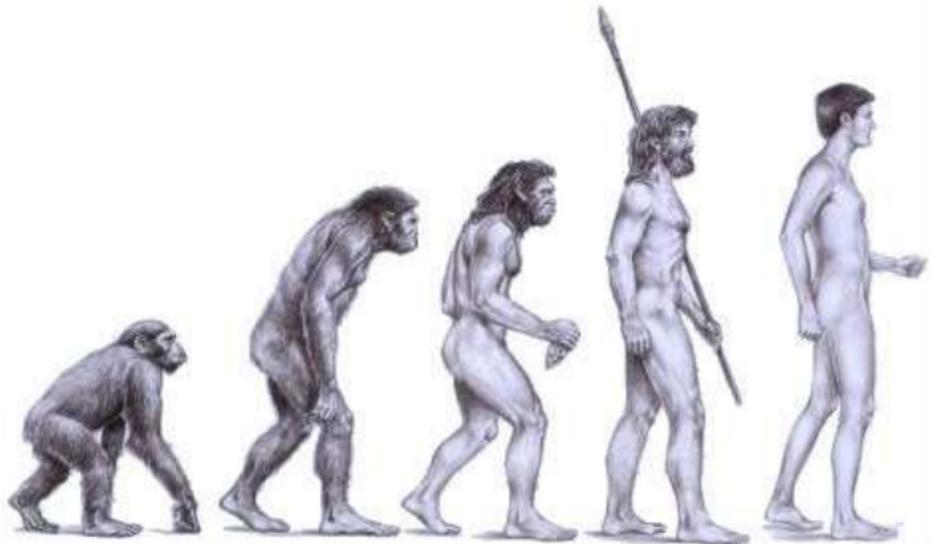
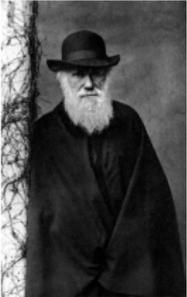
Graphen und Relationen

- Selbstporträt
- Identischer Maler
- Frau
- Mann



Evolution

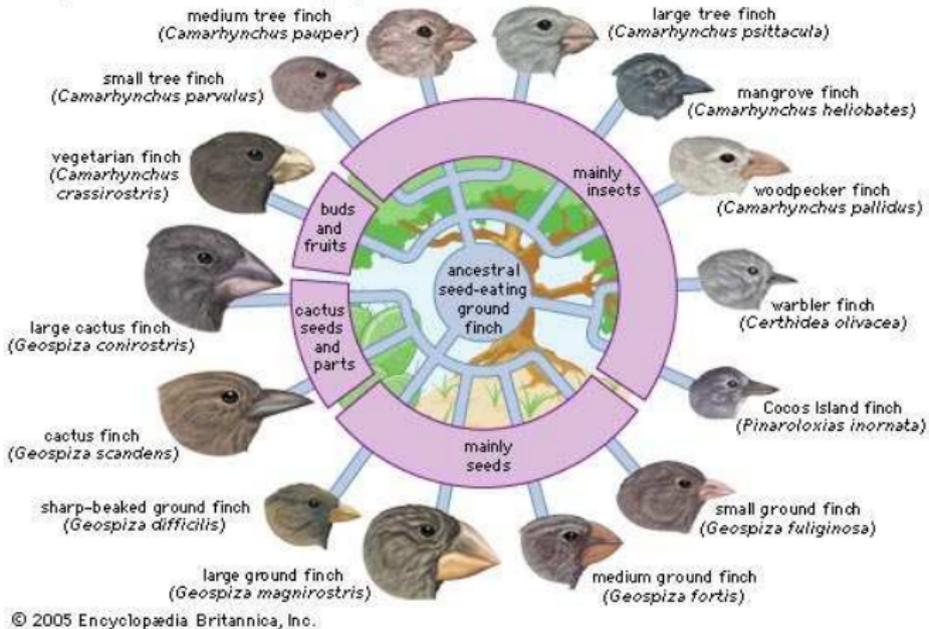
“Die Entstehung der Arten” von Charles Darwin (1859)



Über die Veränderlichkeit äusserlicher Merkmale.

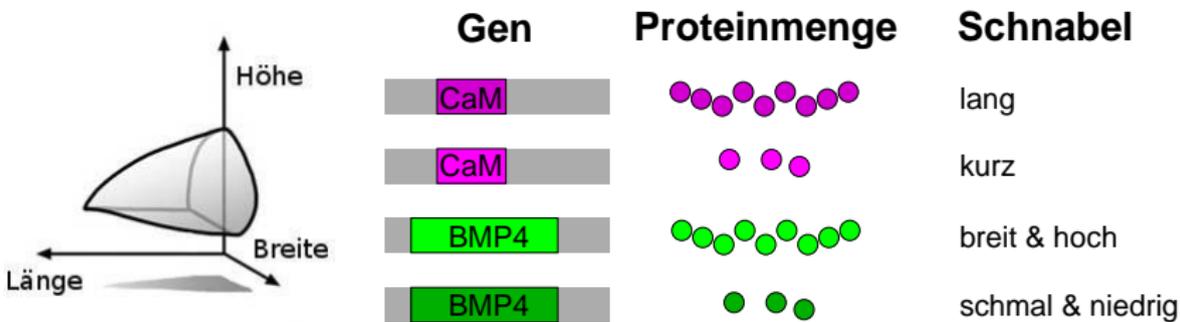
Was ist ein Merkmal?

Adaptive radiation in Galapagos finches



Die Schnabelform ist ein Merkmal. Sie hat verschiedene Ausprägungen.

Wie wird die Ausprägung eines Merkmals festgelegt?



Gene auf der Erbinformation (und ihre Varianten) bestimmen die Ausprägung der Merkmale.

Genotyp + Umwelt \Leftrightarrow Phänotyp

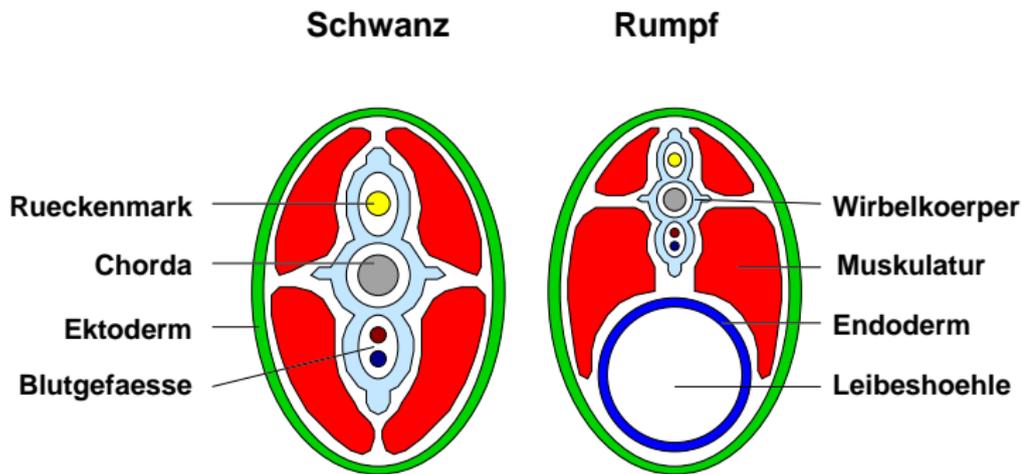


Carotinoide in der Nahrung färben das Gefieder des Flamingos.

Auf den Hund gekommen – wie findet man Merkmale?

Nah verwandte Arten haben gemeinsame Merkmale die sie von ferner verwandten Arten unterscheiden.

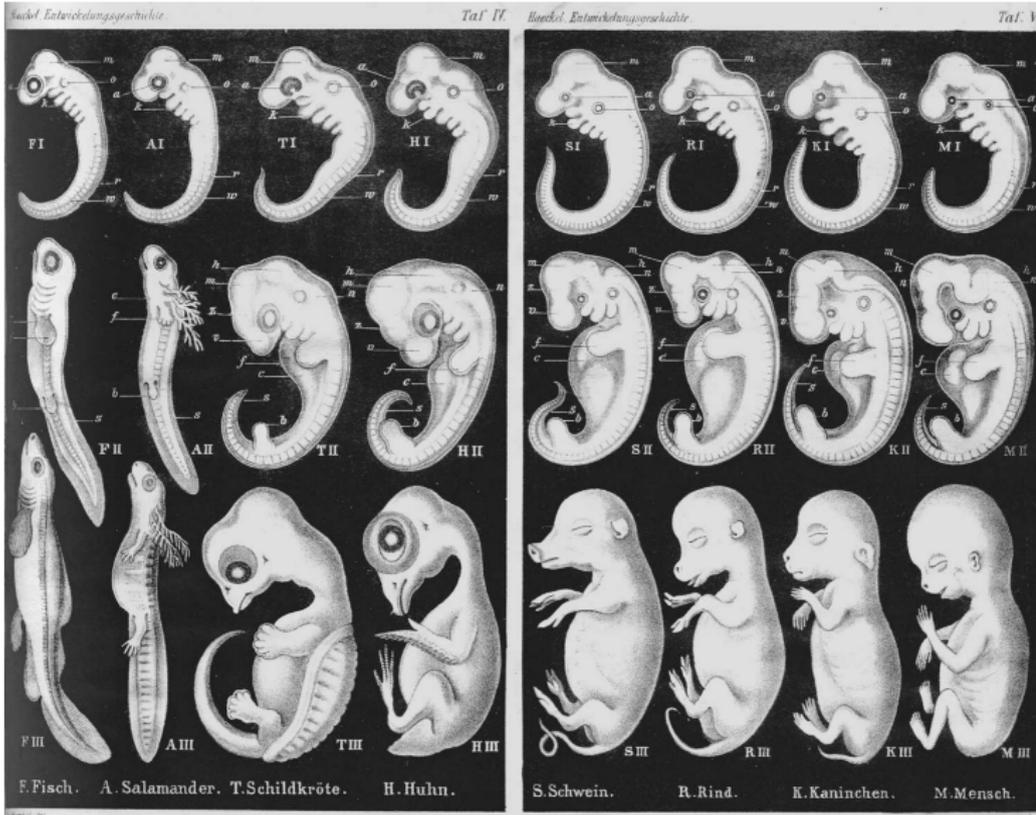
Wirbeltiere haben einen Schwanz (hier im Querschnitt):



Der Schwanz ist im Aufbau ähnlich zum Rumpf aber **ohne** Leibeshöhle (von Mund bis Anus).

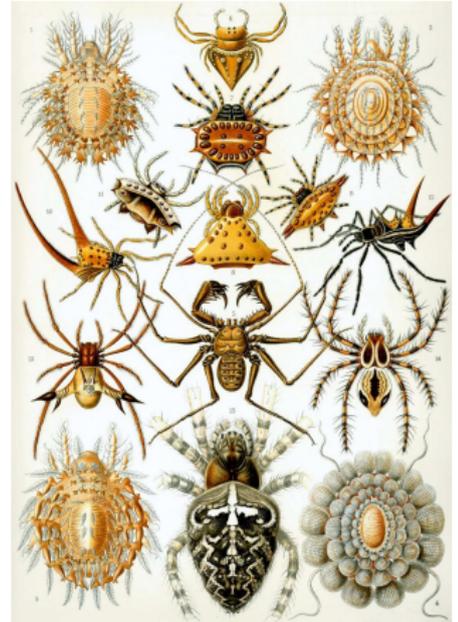
Abstraktion zur Betonung von Merkmalen

Ernst Haeckel, 1868



Ernst Haeckel als Naturwissenschaftler und Künstler

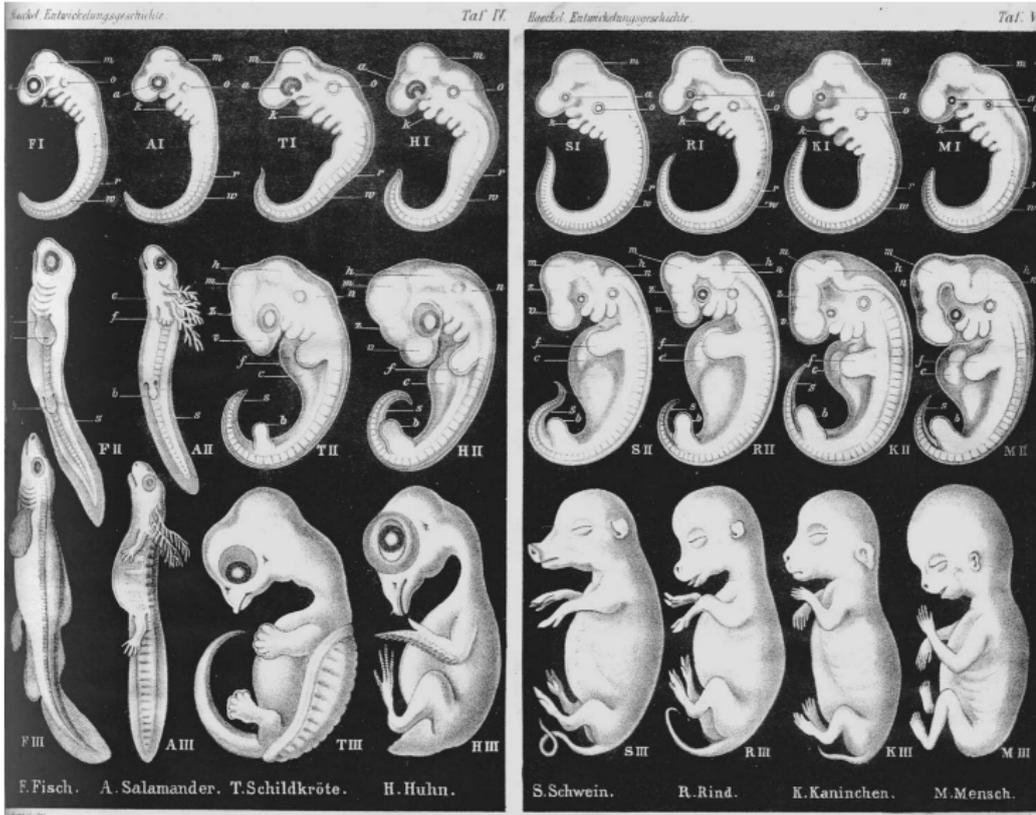
Ernst Häckel, 1868



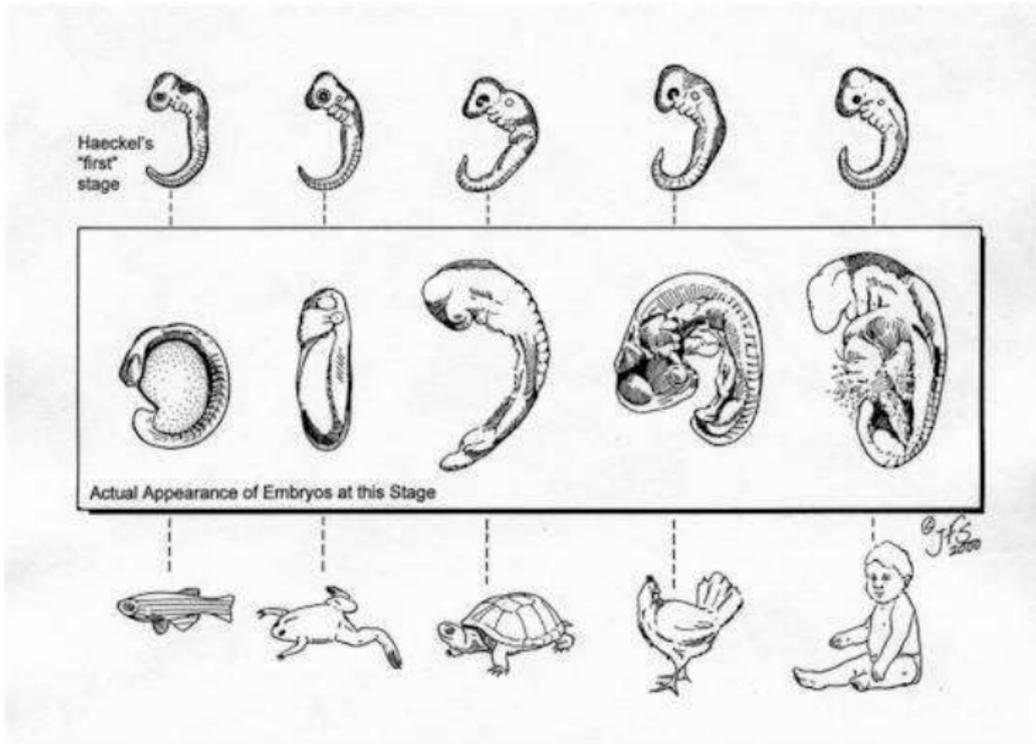
Aus dem Buch "Kunstformen der Natur" von Ernst Häckel (1904).

Abstraktion zur Betonung von Merkmalen

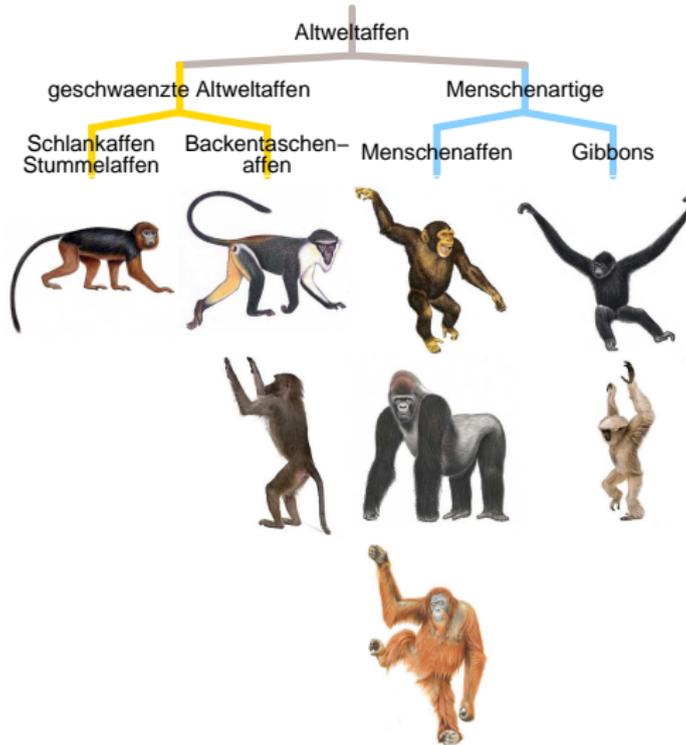
Ernst Haeckel, 1868



Abstraktion und Realität

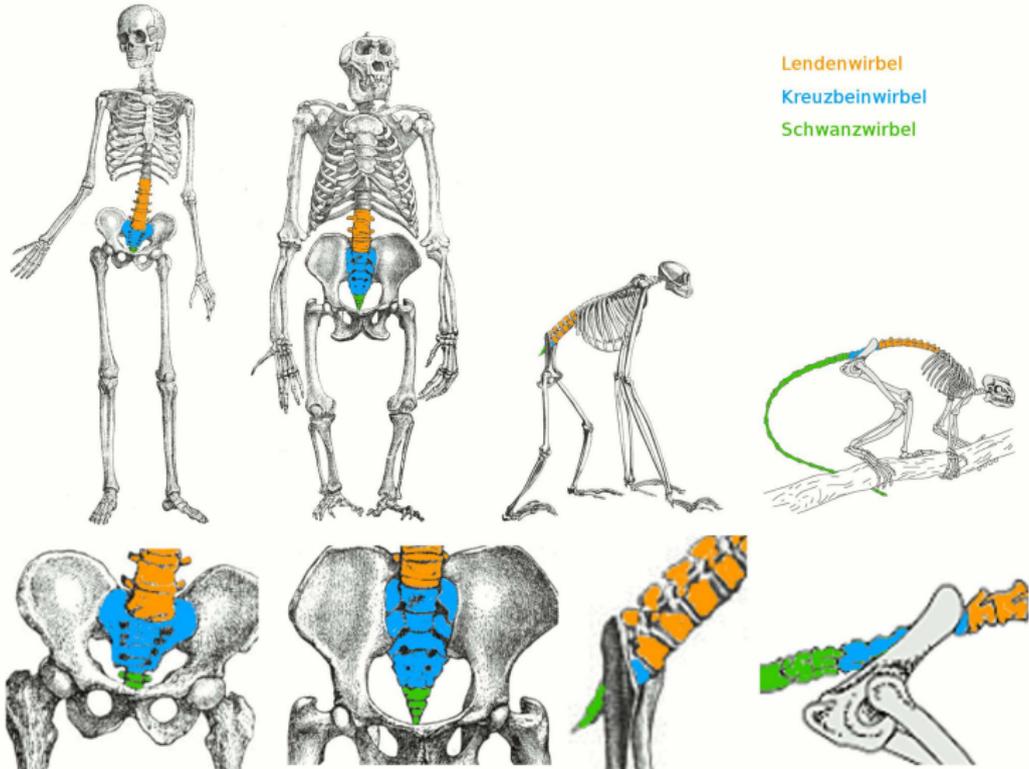


Schwanz oder kein Schwanz?



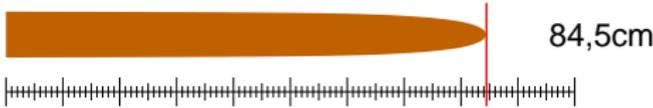
Die **Nicht-Existenz** eines Merkmals ist **kein Merkmal!**

Langer Schwanz oder Steißbein



Diskretisierung von Merkmalen

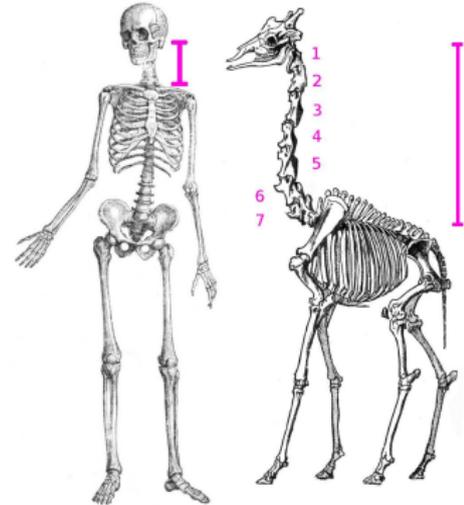
kontinuierlich (x cm)



diskret (0–n Wirbel)



diskret (kurz oder lang)



Bemessen nach der Anzahl der Halswirbel ist der Hals des Menschen genauso lang wie der Hals der Giraffe.

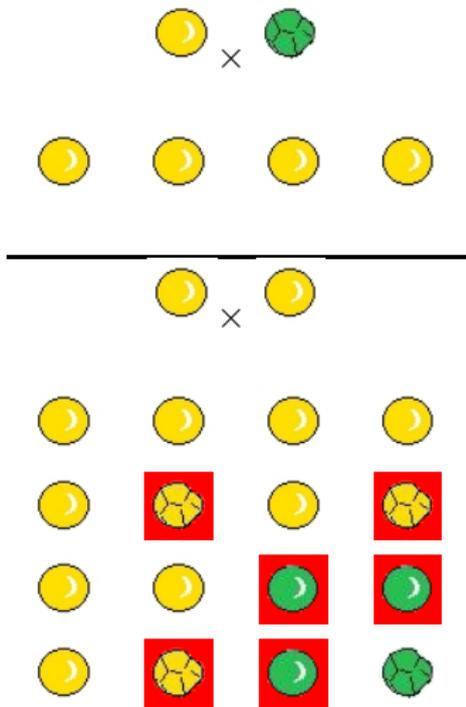
Unabhängigkeit von Merkmalen



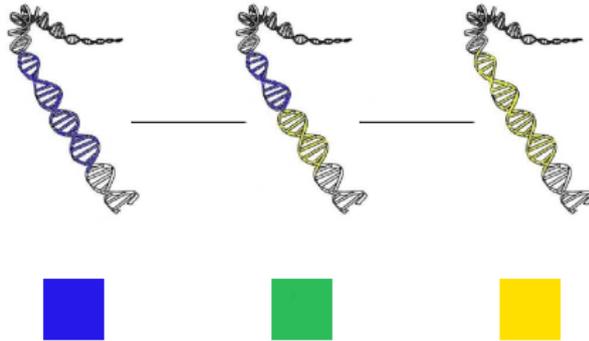
Gregor Mendel (1822-1884) entdeckt, dass die Merkmale

- **“Oberflächenstruktur”**
mit ihrer Ausprägung “glatt” und “runzelig”
- und **“Farbe”**
mit ihrer Ausprägung “gelb” und “grün”

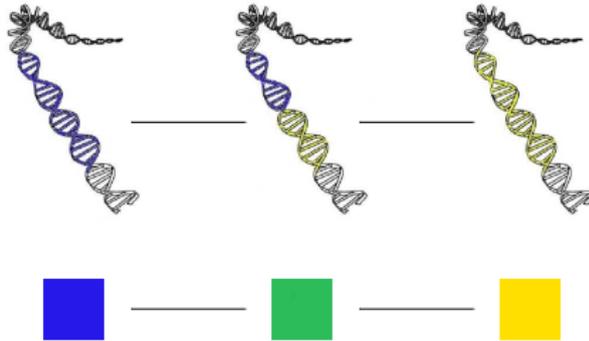
unabhängig, und damit **frei kombinierbar** sind.



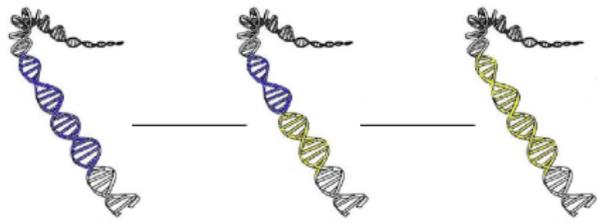
Genotyp-Raum



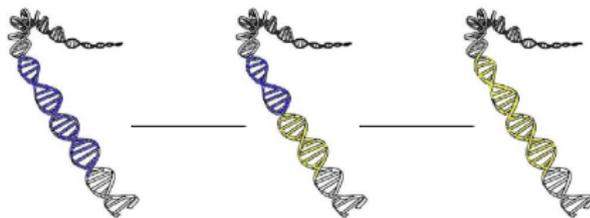
Genotyp-Raum



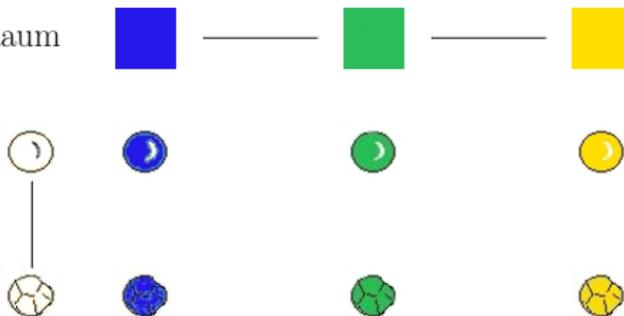
Genotyp-Raum

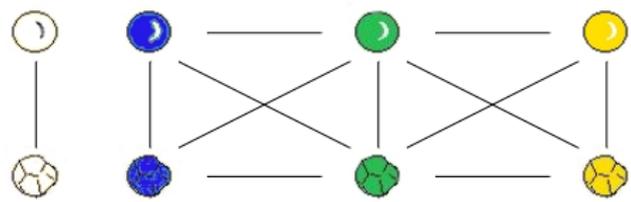


Genotyp-Raum

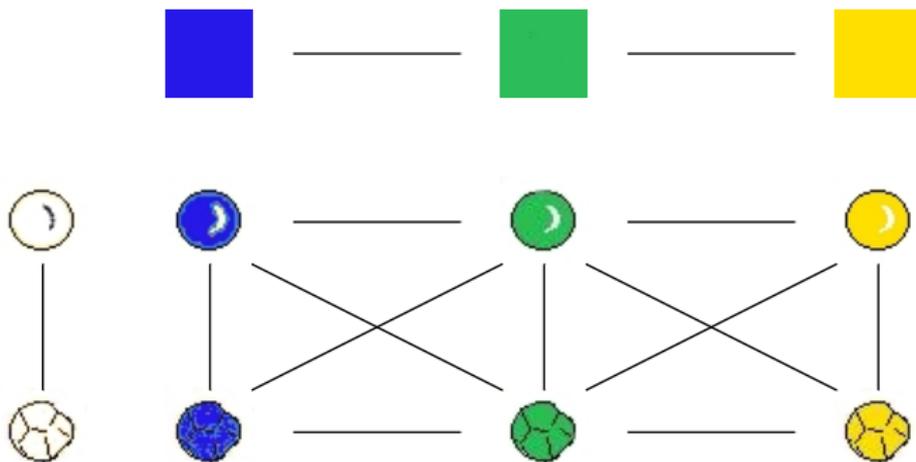


Phänotyp-Raum

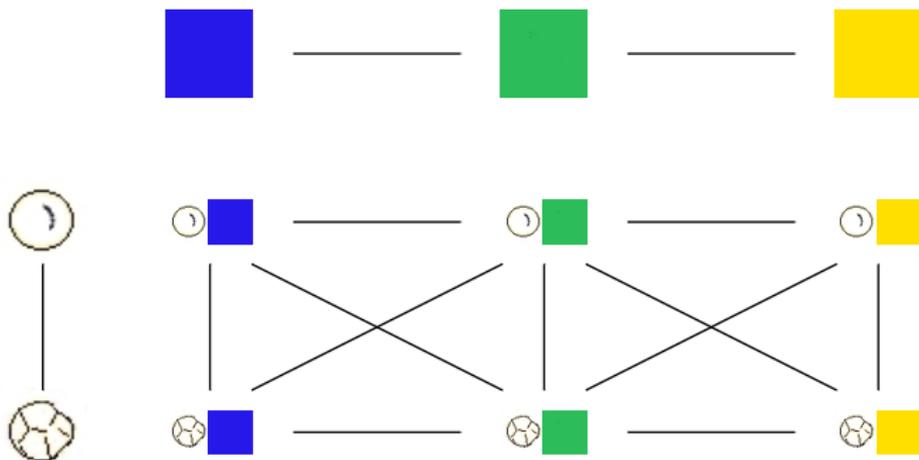




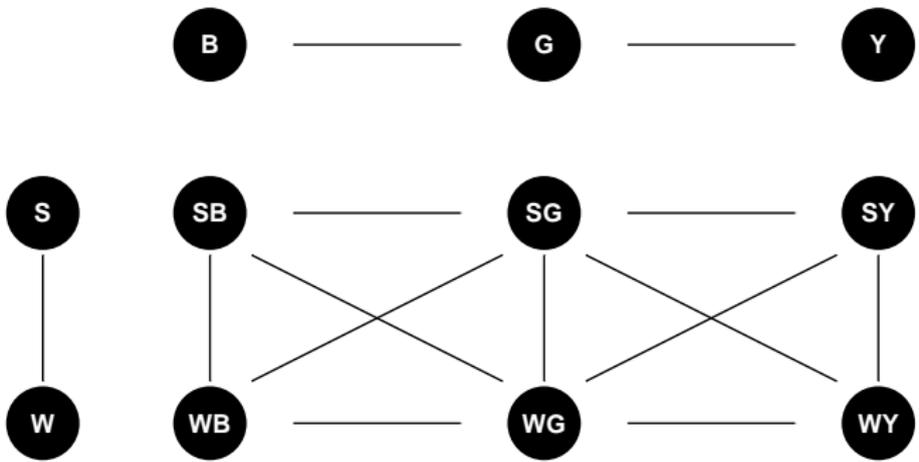
Graphprodukt



Graphprodukt



Graphprodukt



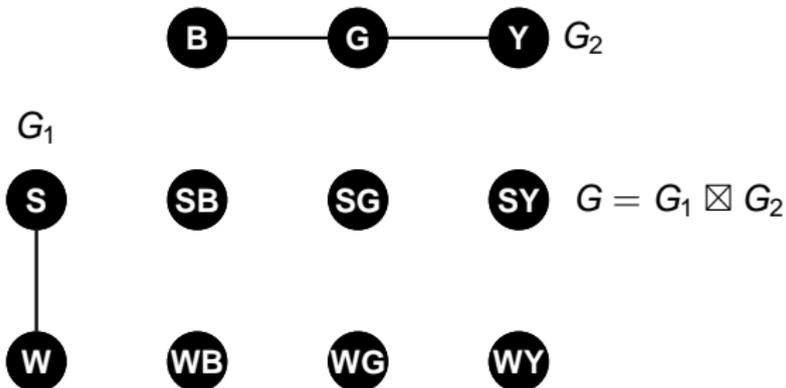
Das starke Graphprodukt $G = G_1 \boxtimes G_2$

Genau wie Zahlen, kann man Graphen miteinander multiplizieren.

Wie sieht das Produkt von Graphen $G = G_1 \boxtimes G_2$ aus?

Die Knotenmenge $V(G)$ des **starken Produkts** (\boxtimes) ist wie folgt definiert:

$$V(G_1 \boxtimes G_2) = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)\}$$

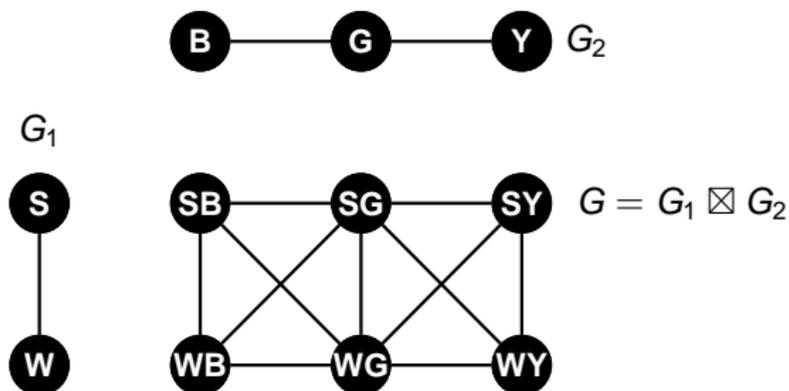


Das starke Graphprodukt $G = G_1 \boxtimes G_2$

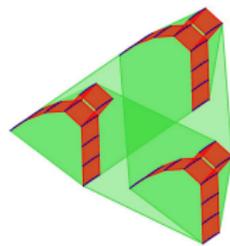
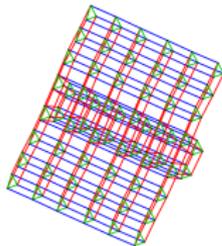
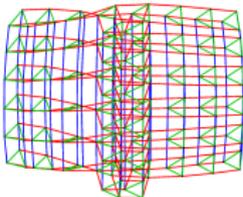
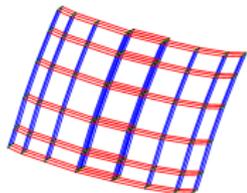
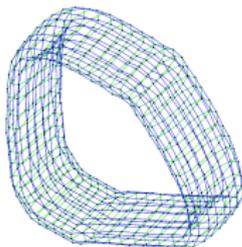
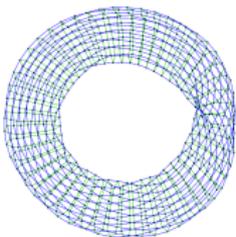
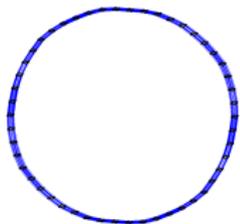
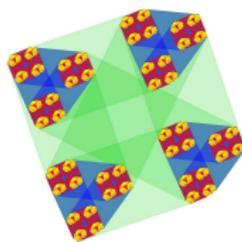
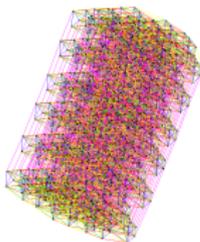
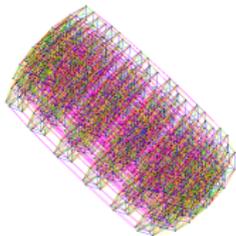
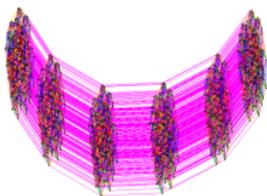
Genau wie Zahlen, kann man Graphen miteinander multiplizieren.
 Wie sieht das Produkt von Graphen $G = G_1 \boxtimes G_2$ aus?

Zwei Knoten (x_1, x_2) , (y_1, y_2) werden in G verbunden falls:

1. $[x_1, y_1] \in E(G_1)$ und $x_2 = y_2$ oder wenn
2. $[x_2, y_2] \in E(G_2)$ und $x_1 = y_1$ oder wenn
3. $[x_1, y_1] \in E(G_1)$ und $[x_2, y_2] \in E(G_2)$.



Beispiele

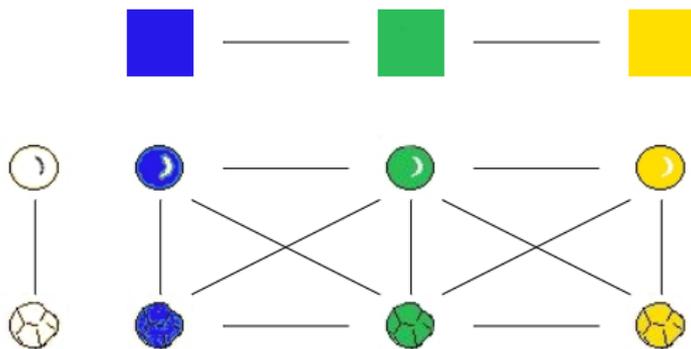


Merkmale und Produktgraphen³



Theorem

Merkmale können unabhängig voneinander variieren \iff
Prim Faktoren des Phenotype-Space



³Quasi-Independence, Homology and the Unity of Type: A Topological Theory of Characters, Günter Wagner and Peter F. Stadler, J. theor. Biol., 2003

Prim Faktor Zerlegung (PFZ)

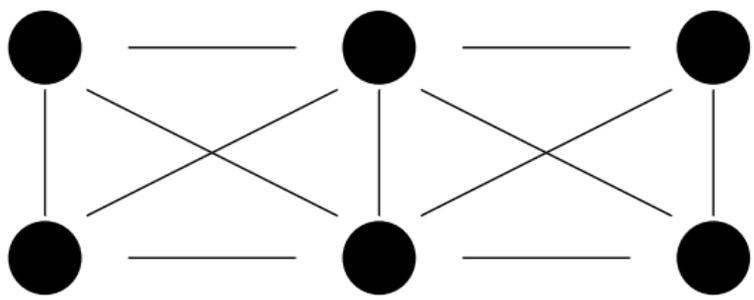
G ist **prim**, wenn

$$G = G_1 \boxtimes G_2 \Rightarrow G_1 \simeq K_1 \text{ or } G_2 \simeq K_1$$

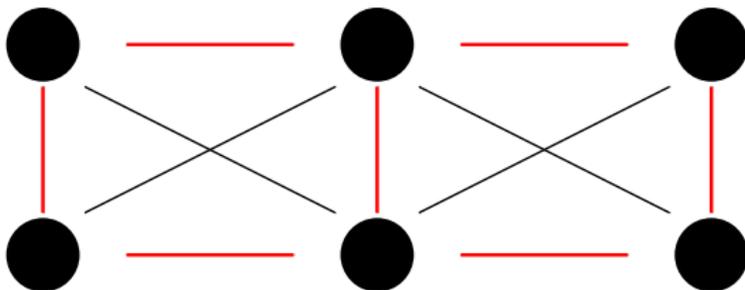


Ziel: Finde PFZ gegebener Graphen G .

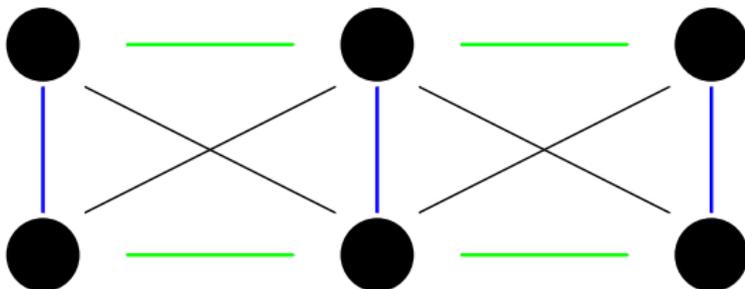
Skizze: Prim Faktor Zerlegung des starken Graphprodukts



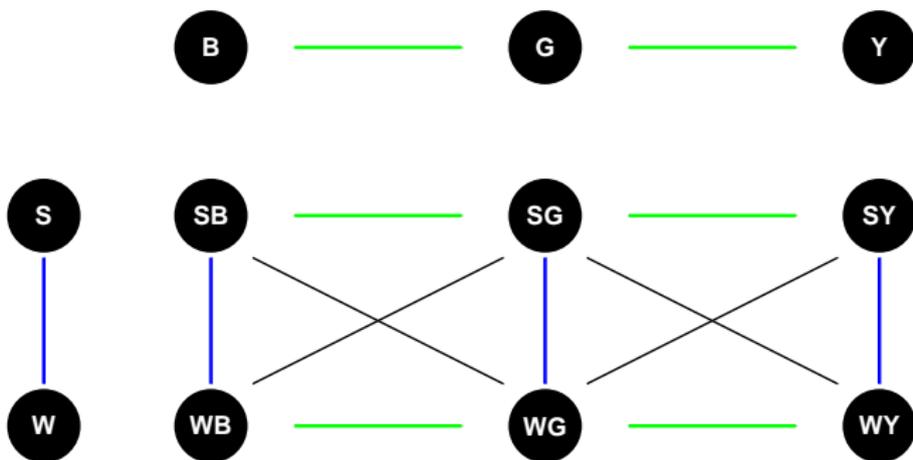
Skizze: Prim Faktor Zerlegung des starken Graphprodukts



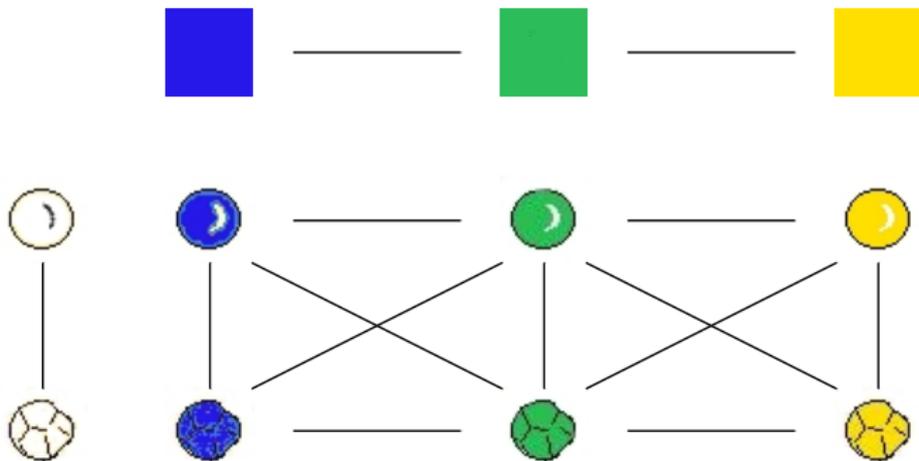
Skizze: Prim Faktor Zerlegung des starken Graphprodukts



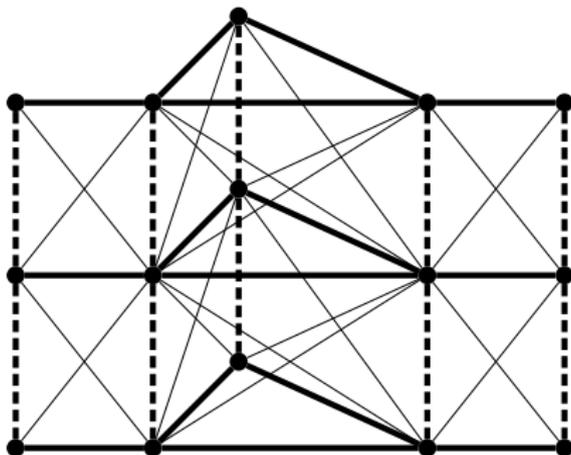
Skizze: Prim Faktor Zerlegung des starken Graphprodukts



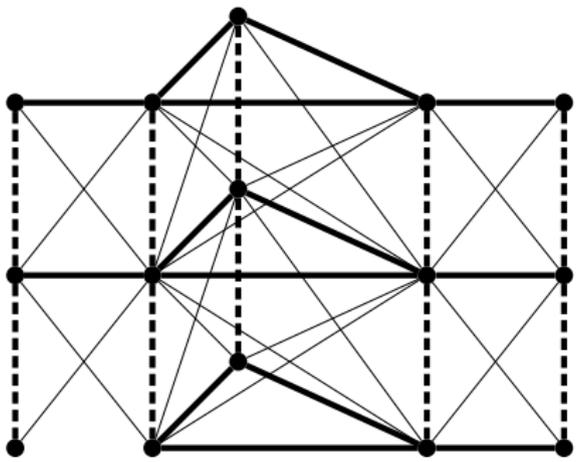
Skizze: Prim Faktor Zerlegung des starken Graphprodukts



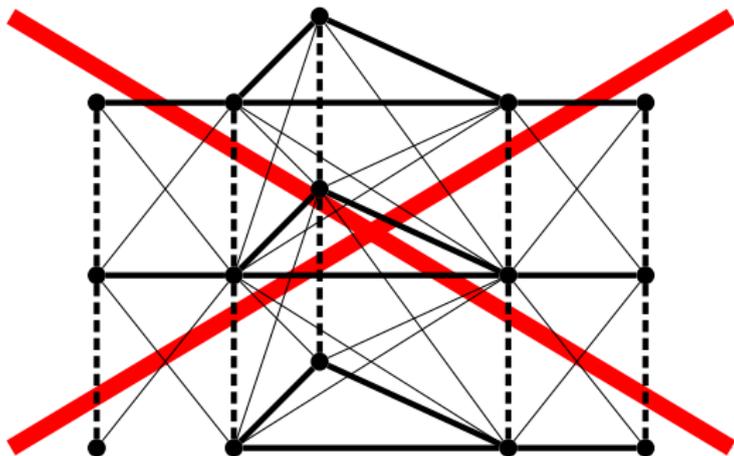
This was easy. – Wo ist denn das Problem?



This was easy. – Wo ist denn das Problem?



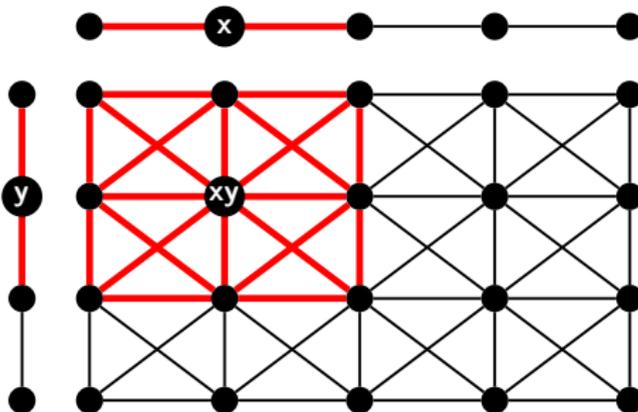
This was easy. – Wo ist denn das Problem?



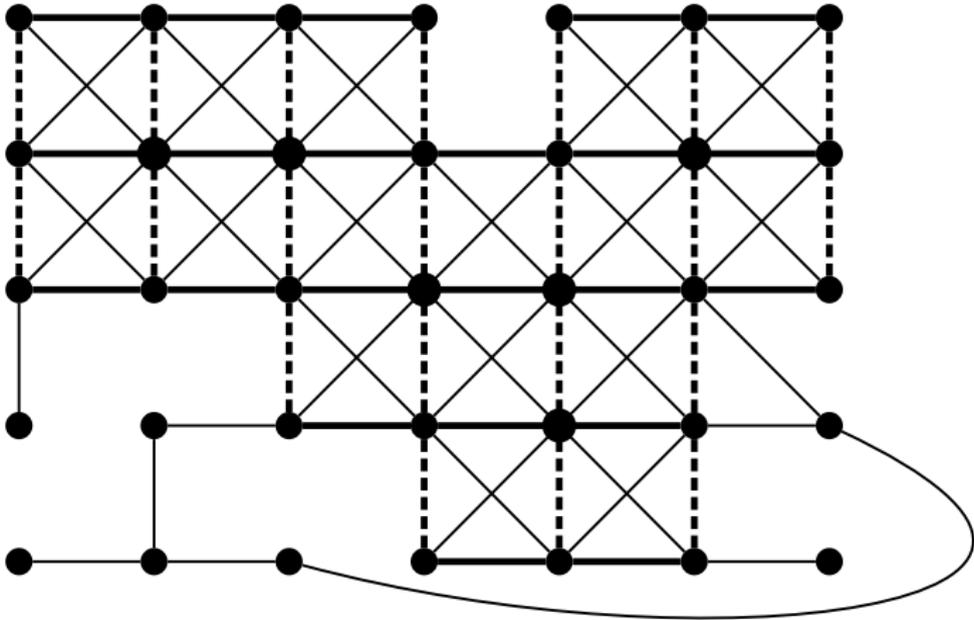
Der Graph ist prim .. und nun?

Ziel: Finde Produkt, welches sich "wenig" vom Prim Graphen unterscheidet (Approximative Produkte).

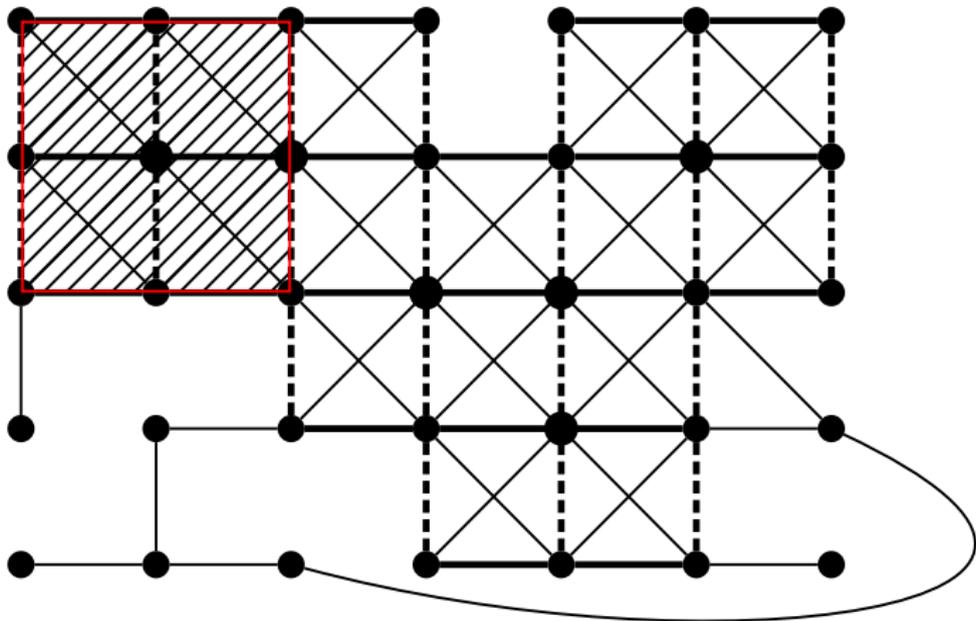
Lemma. Induzierte Nachbarschaften in Produkten sind Teilprodukte.



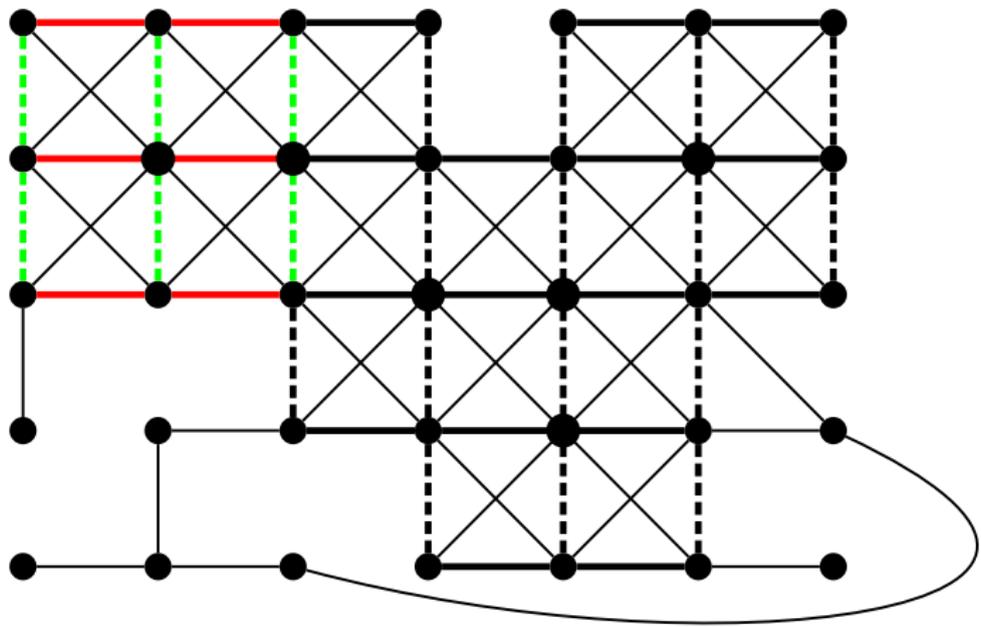
Der Graph ist prim .. und nun?



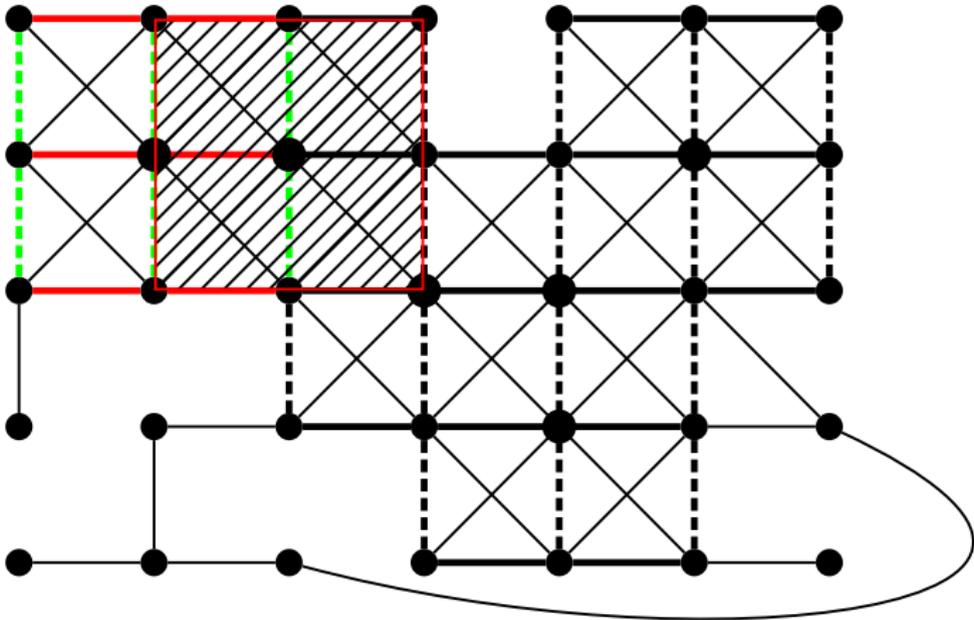
Der Graph ist prim .. und nun?



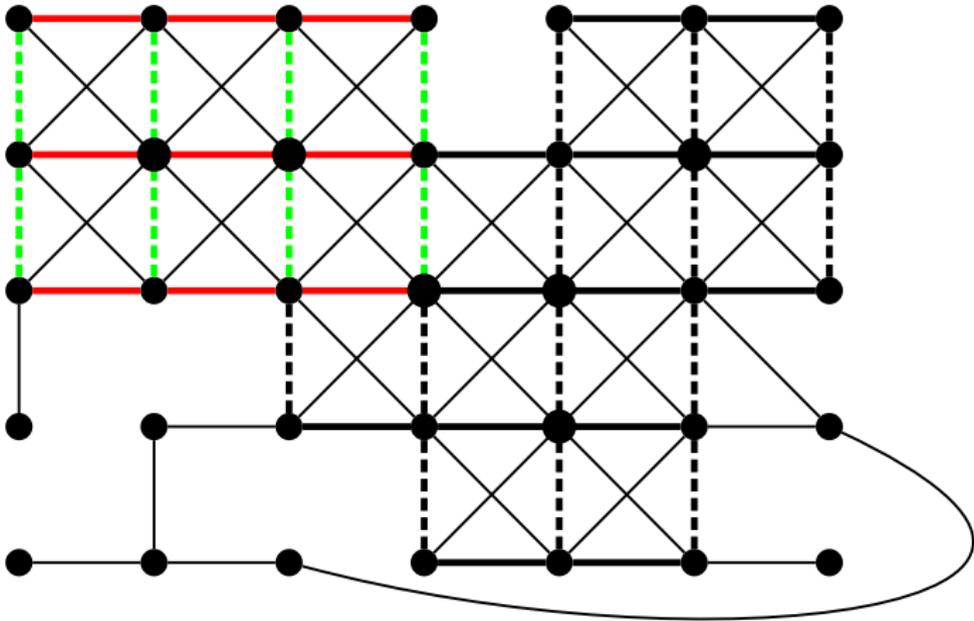
Der Graph ist prim .. und nun?



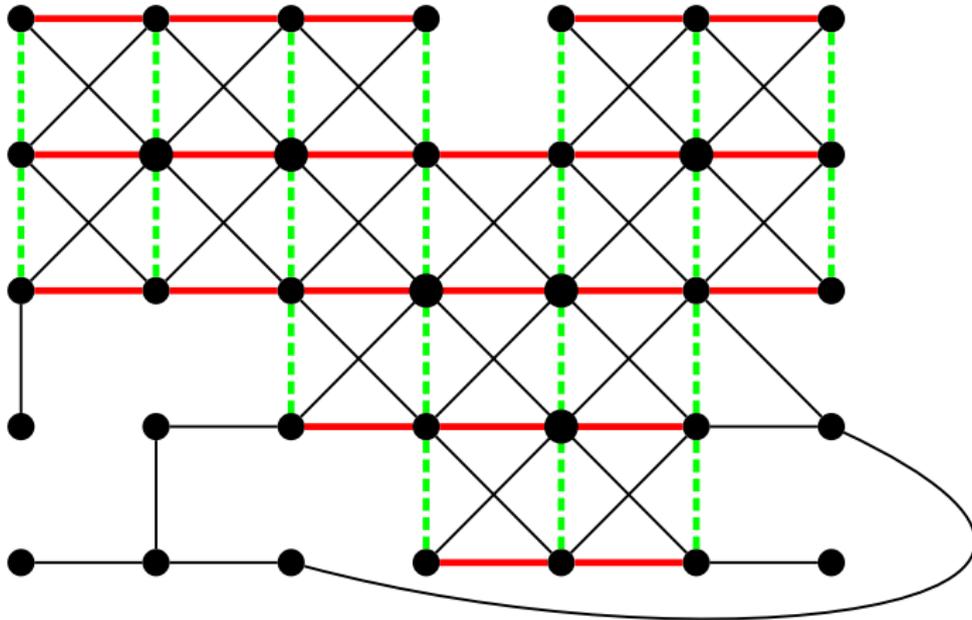
Der Graph ist prim .. und nun?



Der Graph ist prim .. und nun?



Der Graph ist prim .. und nun?



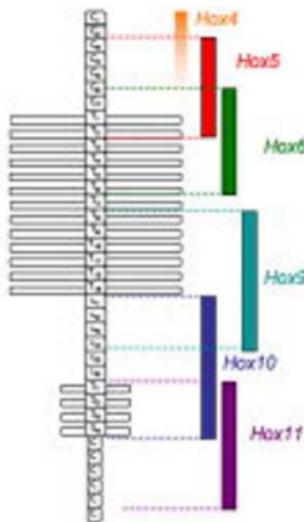
Gene, die die Schwanzlänge kontrollieren

HOX-Gene bestimmen Typ und Anzahl der Wirbel.

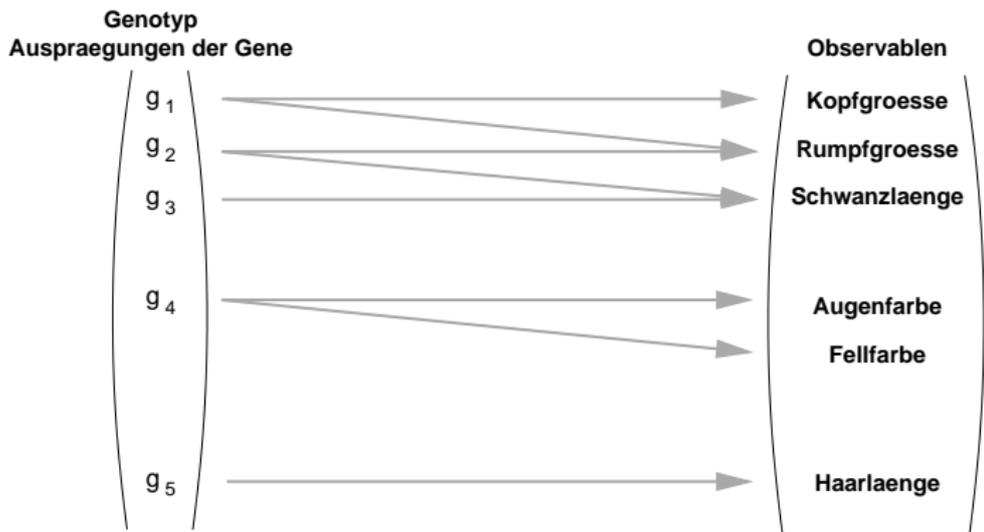
Sie sind verantwortlich für die Strukturierung von

- Wirbelsäule
- Gliedmaßen
- Gehirn und Rückenmark
- Gebärmutter

Die Schwanzlänge ist **kein unabhängiges Merkmal**.

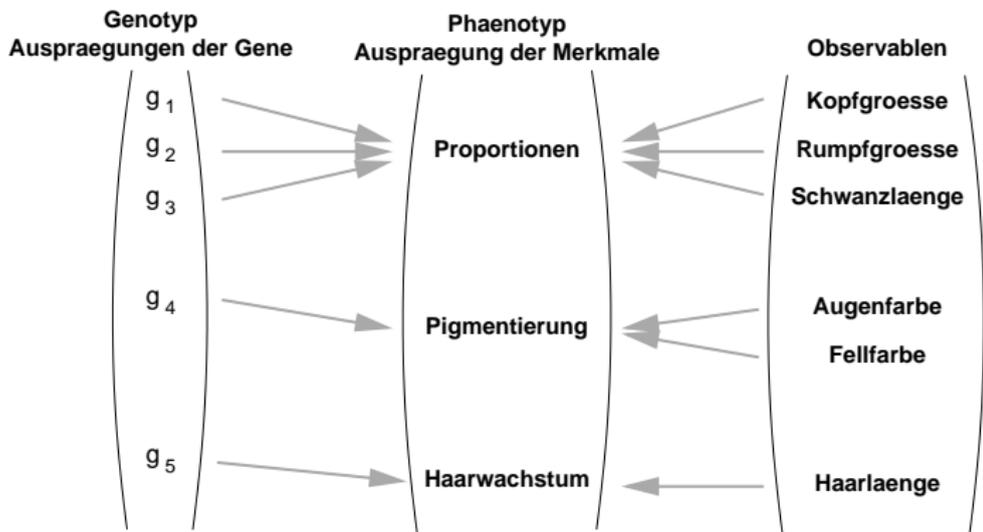


Ohne Schwanzlängen...



Koerpergröße, Rumpfgröße und Schwanzlänge sind voneinander abhängig.

Ohne Schwanzlängen...



Auf die Beobachtung kommt es an!

... bleibt nur kupieren!



Danke!

