ADS: Algorithmen und Datenstrukturen

Teil $\lfloor \pi \rfloor$

Peter F. Stadler & Konstantin Klemm

Bioinformatics Group, Dept. of Computer Science & Interdisciplinary Center for Bioinformatics, **University of Leipzig**

Oct 27 2010

Verkettete Listen

- Sequentielle Speicherung erlaubt schnelle Suchverfahren
  - falls Sortierung vorliegt
  - da jedes Element über Indexposition direkt ansprechbar
- Nachteile der sequentiellen Speicherung
  - hoher Änderungsaufwand durch Verschiebekosten: $O(n)$
  - schlechte Speicherplatzausnutzung
  - inflexibel bei starkem dynamischem Wachstum
- Abhilfe: verkettete lineare Liste (Kette)
- Spezielle Kennzeichnung erforderlich für
  - Listenanfang (Anker)
  - Listenende
  - leere Liste

Verkettete Liste: Implementierung

- Listenanfang wird durch speziellen Zeiger head (Kopf, Anker) markiert
- Leere Liste: *head* = `null`
- Listenende: *next*-Zeiger = `null`

Element: $[key|\langle \mathrm{data} \rangle|next]$
Liste = *head*-Zeiger auf das erste Element
Ende = *next*-Zeiger = `null`-pointer $\varnothing$
Schematisch
head $\rightarrow [7||] \rightarrow [13||] \rightarrow [34||] \rightarrow \cdots \rightarrow [90||] \rightarrow [9||\varnothing]$

Verkettete Liste: Löschen

$$\ldots [k_1||n_1] \longrightarrow [k_2||n_2] \longrightarrow [k_3||n_3] \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots [k_1||n_2] \longrightarrow \qquad\qquad [k_3||n_3] \longrightarrow \ldots$$

```
if ( z1 != null AND z1 -> next != null )
    z1 -> next = z1 -> next -> next
```

Verkettete Liste: Suchen

```
1. (Initialisieren): Setze aktuelles_Element := head
2. (Test): Gesuchtes Element hier gefunden? Falls ja,return("g
3. (Abbruch?): aktuelles_Element = Listenende? Falls ja, retur
4. (Iteration): Setze aktuelles_Element := n{\"a}chstes_Elemer
```

Nur sequentielle Suche möglich (sowohl im geordneten als auch im ungeordneten Fall)! **Nachteile:**

- Einfügen und Löschen eines Elementes mit Schlüsselwert x erfordert vorherige Suche
- Bei Listenoperationen müssen Sonderfälle stets abgeprüft werden (Zeiger auf Null prüfen etc.)

Fragen: Wie funktioniert Löschen eines Elementes an Position (Zeiger) p ?
Wie funktioniert Hintereinanderfügen von 2 Listen ?

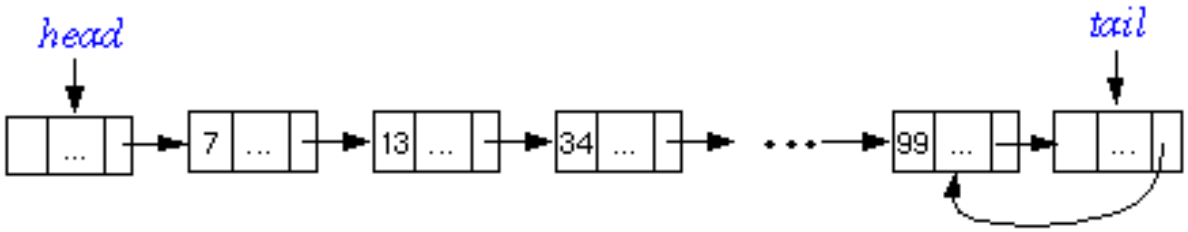
Verkettete Liste: Suchen

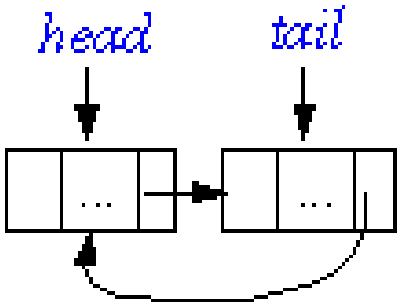
```
Suche key = x:
Beginn: Zeiger = head.
while (Zeiger -> key != x) Zeiger = Zeiger -> next;
```

... Abbruch.
(Das gesuchte Element soll enthalten sein.)

Verkettete Listen: Alternative Implementierung

Dummy Elemente: `head` und `tail`
`tail` $\rightarrow$ *next* zeigt auf das letzte echte Listenelement
- Next-Zeiger des Dummy-Elementes am Listenende verweist auf vorangehendes Element (erleichtert Hintereinanderfügen zweier Listen und Abprüfen von Sonderfällen)





Leere Liste
`head`$\rightarrow$`next`$\rightarrow$`next` $=$ `head`

Doppelt gekettete Liste

`head`, `tail`, Zeiger nicht nur zum Nachfolger *next*, sondern auch zum Vorgänger *previous*

Bewertung

- höherer Speicherplatzbedarf als bei einfacher Verkettung
- Aktualisierungsoperationen etwas aufwendiger (Anpassung der Verkettung)
- Suchaufwand in etwa gleich hoch, jedoch ggf. geringerer Suchaufwand zur Bestimmung des Vorgängers (Operation PREVIOUS(L, p))
- geringerer Aufwand für Operation DELETE(L, p)

Flexibilität der Doppelverkettung besonders vorteilhaft, wenn Element gleichzeitig Mitglied mehrerer Listen sein kann (Multilist-Strukturen)

Vergleich verketteter Listen

- Suchaufwand bei ungeordneter Liste
  - erfolgreiche Suche: $C_{avg} = (n+1)/2$ (Standardannahmen: zufällige Schlüsselauswahl; stochastische Unabhängigkeit der gespeicherten Schlüsselmenge)
  - erfolglose Suche: vollständiges Durchsuchen aller n Elemente
- Einfügen oder Löschen eines Elements
  - konstante Kosten für Einfügen am Listenanfang
  - Löschen verlangt meist vorherige Suche
  - konstante Löschkosten bei positionsbezogenem Löschen und Doppelverkettung
- Sortierung bringt kaum Vorteile
  - erfolglose Suche verlangt im Mittel nur noch Inspektion von $(n+1)/2$ Elementen
    (Bei Abbruch der Suche mit gleicher Wahrscheinlichkeit an allen Positionen der Liste)
  - lineare Kosten für Einfügen in Sortierreihenfolge

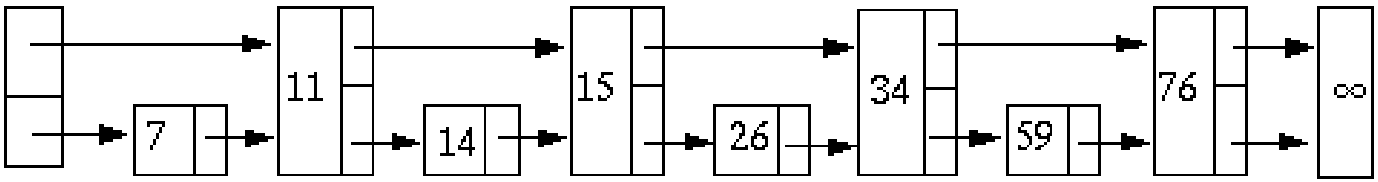
Skip-Listen

Ziel: verkettete Liste mit logarithmischem Aufwand für Suche, Einfügen und Löschen von Schlüsseln (Wörterbuchproblem)
Verwendung sortierter verkettet gespeicherter Liste mit zusätzlichen Zeigern

Prinzip

- Elemente werden in Sortierordnung ihrer Schlüssel verkettet
- Führen mehrerer Verkettungen auf unterschiedlichen Ebenen:

Verkettung auf Ebene 0 verbindet alle Elemente;
Verkettung auf Ebene 1 verbindet jedes zweite Element;
...
Verkettung auf Ebene i verbindet jedes $2i$-te Element ($i = 0, 1, \ldots$)



Perfekte Skip-Liste - Anzahl Zeiger & Kosten

Zahl der Zeiger auf eigentliche Elemente: $n = 2^k$
Ebene 0: n Zeiger
Ebene 1: $n/2$ Zeiger
...
Ebene k: 1
Insgesamt $n + n/2 + n/4 + \cdots + 1 = \sum_{i=0}^{k} \frac{n}{2^i} \geq 2n$
Anzahl der Ebenen (Listenhöhe): $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$
maximale Anzahl der Zeiger pro Element $\geq \lfloor \log_2 n \rfloor$
maximale Gesamtzahl der Zeiger $< 2n$
Suche $O(\log n)$
Perfekte Skip-Listen zu aufwendig bezüglich Einfügungen und Löschvorgängen (vollständige Reorganisation erforderlich, Kosten $O(n)$

Randomisierte Skip-Listen

- Strikte Zuordnung eines Elementes zu einer Höhe (Anzahl der Ebenen) wird aufgegeben
- Höhe eines neuen Elementes x wird nach Zufallsprinzip ermittelt, jedoch so, daß die relative Häufigkeit der Elemente pro Ebene (Höhe) eingehalten wird, d.h. $P(i) = 1/2i$ (für Höhen $i = 1, 2, ...$)
- Somit entsteht eine "zufällige" Struktur der Liste
- Kosten für Einfügen und Löschen im wesentlichen durch Aufsuchen der Einfügeposition bzw. des Elementes bestimmt: $O(logN)$

Stacks als spezielle Listen

Synonyme: Stapel, Keller, LIFO-Liste usw.
Stack kann als spezielle Liste aufgefaßt werden, bei der alle Einfügungen und Löschungen nur an einem Ende, TOP genannt, vorgenommen werden
Stack-Operationen (ADT):

1. CREATE: Erzeugt den leeren Stack
2. INIT(S): Initialisiert S als leeren Stack
3. PUSH(S, x): Fügt das Element x als oberstes Element von S ein
4. POP(S): Löschen des Elementes, das als letztes in den Stack S eingefügt wurde
5. TOP(S): Abfragen des Elementes, das als letztes in den Stack S eingefügt wurde
6. EMPTY(S): Abfragen, ob der Stack S leer ist

Alle Operationen mit konstanten Kosten realisierbar: $O(1)$

Beispiel: Operationen auf Stack

$S = |a, b$
POP(S)
$S = |a$
PUSH(S, c)
$S = |a, c$
EMTPY(S) ... false

Anwendung: Wohlgeformte Klammerausdrücke

Definition

- ( ) ist ein wohlgeformter Klammerausdruck (wgK)
- Sind w_1 und w_2 wgK, so ist auch ihre Konkatenation w_1 w_2 ein wgK
- Mit w ist auch (w) ein wgK
- Nur die nach den vorstehenden Regeln gebildeten Zeichenreihen bilden wgK
- Beispiel: ((( )) ( )) ist wohlgeformt.

Algorithmus: Idee: Stapel zur Speicherung öffnender Klammern.

- Einlesen des Ausdrucks von links nach rechts.
- Wird eine öffnende Klammer gelesen: Speichere diese im Stack
- Wird eine schließende Klammer gelesen: Entferne das oberste Stack-Element.
- wgK liegt vor, wenn Stack am Ende leer ist

Anwendung: UPN-Notation

`dc - an arbitrary precision calculator`
argumente und operationen werden in der Reihenfolge auf den Stack gelegt, in der sie ausgewertet werden.
Beispiel: berechne `(a+b) * (c+d/e)`
UPN Notation: `a b + c d e / + *`
Warum ist das richtig ?
→TAFEL

Schlangen

Synonyme: FIFO-Schlange, Warteschlange, Queue
Spezielle Liste, bei der die Elemente an einem Ende (hinten) eingefügt und am anderen Ende (vorne) entfernt werden
Operationen:

- CREATE: Erzeugt die leere Schlange
- INIT (Q): Initialisiert Q als leere Schlange
- ENQUEUE (Q, x): Fügt das Element x am Ende der Schlange Q ein
- DEQUEUE (Q): Löschen des Elementes, das am längsten in der Schlange verweilt (erstes Element)
- FRONT (Q): Abfragen des ersten Elementes in der Schlange
- EMPTY (Q): Abfragen, ob die Schlange leer ist

$Q = [a, b, c]$ ENQUEUE(Q, d) $Q = [a, b, c, d]$
DEQUEUE(Q) $Q = [b, c, d]$

Vorrangwarteschlangen (priority queues)

Jedes Element erhält Priorität. Entfernt wird stets Element mit der höchsten Priorität (Aufgabe des FIFO-Verhaltens einfacher Warteschlangen)
Operationen:

- CREATE: Erzeugt die leere Schlange
- INIT(P): Initialisiert P als leere Schlange
- INSERT(P, x): Fügt neues Element x in Schlange P ein
- DELETE(P): Löschen des Elementes mit der höchsten Priorität aus P
- MIN(P): Abfragen des Elementes mit der höchsten Priorität
- EMPTY(P): Abfragen, ob Schlange P leer ist.

Sortierung nach Prioritäten beschleunigt Operationen DELETE und MIN auf Kosten von INSERT.

9, 7, 4, 3
INSERT(P,5)
9, 7, 5, 4, 3
INSERT(P,1)
9, 7, 5, 4, 3, 1
DELETE(P)
7, 5, 4, 3, 1