ADS: Algorithmen und Datenstrukturen

Akuter Denk-Stau

Peter F. Stadler & Konstantin Klemm

Bioinformatics Group, Dept. of Computer Science & Interdisciplinary Center for Bioinformatics, **University of Leipzig**

20. Oktober 2010

Ankündigungen im Netz

Anmeldung zu Übungen, Übungsaufgaben, Vorlesungsfolien, Termin- und Raumänderungen, ...

http://www.bioinf.uni-leipzig.de

→ Teaching → Current classes → Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsaufgaben

- Es sind 5 Übungsserien zu lösen
  - Die Lösungen sind zu den folgenden Terminen abzugeben 03.11, 24.11., 08.12., 05.01., 19.01.
  - Lösungen sind direkt **vor** Beginn der Vorlesung **im Hörsaal** abzugeben.
  - Lösungen werden bewertet und in der Übungsstunde zurückgegeben.
- Punkte gibt es für das Lösen der Aufgaben, nicht für die Abgabe der Kopie der Lösung
- Es wird daher stichprobenartig überprüft, ob die Lösung auch verstanden wurde und erklärt werden kann.
  Dies geschieht normalerweise in den Übungsstunden.
- Im Falle von Verhinderung sind die Aufgaben beim *Übungsleiter* abzuholen. Dabei ist das Verständnis der Lösungen im Rahmen einer kurzen Befragung nachzuweisen. Seien Sie also im eigenen Interesse in den Übungesstunden anwesend.

Übungstermine

Vorläufige Termine der Übungsgruppen

- Dienstag 17:15 – 18:45 Uhr
- Mittwoch 09:15 – 10:45 Uhr
- Mittwoch 13:15 – 14:45 Uhr
- Donnerstag 13:15 – 14:15 Uhr
- Freitag 13:15 – 14:45 Uhr

Gibt es Hörer, für die bei allen diesen Terminen Kollisionen bestehen? Falls ja, teilen Sie mir das **JETZT** mit. Wir werden uns bemühen, eine Alternative zu finden.

Falls Sie diese Folie erst nach der Vorlesung zum ersten mal lesen: Schreiben Sie keine Emails mit weiteren Sonderterminwünschen. Der Zug ist abgefahren.

Übungen — Anmeldung

1. Die Anmeldung für die Übungen wird **nach** dieser Vorlesung geöffnet.
   Wie danken allen α-Testern, die gestern bereits während eines kurzen Tests der Webseite etwas eingetragen haben.
   Diese Einträge sind ungültig.
   Sie müssen sich während der regulären Anmeldefirst eintragen.
2. **Anmeldefrist:** Mittwoch 13.10. 19:00 MEZ(SZ) bis Dienstag 19.10 12:00 MEZ
3. Sie können sich **AUSSCHLIESSLICH** hier anmelden:

http://www.bioinf.uni-leipzig.de

→ Teaching → Current classes → Algorithmen und Datenstrukturen

Klausur

Termin (voraussichtlich): Woche vom 8.2.2011

Zulassungsvoraussetzungen

- Erreichen von 50% der Punkte in den Übungsaufgaben
- Fähigkeit, abgegebene Lösungen zu erläutern
  Kommen Sie also bitte zu den Übungsgruppen

Übungsscheine

Diplom Mathematik (und evtl andere Studiengänge in denen ein Übungsschein, nicht aber die Klausur gefordert ist):

- Der (unbenotete) Übungsschein wird ausgestellt, wenn **60%** der Punkte in den Übungsaufgaben erreicht wurden, **und** die Fähigkeit, abgegebene Lösungen zu erläutern, überprüft werden konnte.
  Kommen Sie also bitte zu den Übungsgruppen
- **Falls** Sie die notwendige Punktezahl nicht erreichen, **können** Sie die Klausur mitschreiben, und erhalten den Übungsschein wenn Sie die Klausur bestehen.
  Teilen Sie bei der Anmeldung zur Klausur dann mit, dass Sie nur wegen des Übungsscheins antreten!

http://www.bioinf.uni-leipzig.de

$\rightarrow$ Teaching $\rightarrow$ Current classes $\rightarrow$ Algorithmen und Datenstrukturen

ALLES KLAR ?

Inhalt

1. Einführung: Typen von Algorithmen, Komplexität von Algorithmen
2. Einfache Suchverfahren in Listen
3. Verkette Listen, Stacks und Schlangen
4. Sortierverfahren
    - Elementare Verfahren
    - Shell-Sort, Heap-Sort, Quick-Sort
    - Externe Sortierverfahren
5. Allgemeine Bäume und Binärbäume
    - Orientierte und geordnete Bäume
    - Binärbäume (Darstellung, Traversierung)
6. Binäre Suchbäume
7. Mehrwegbäume

Wozu das Ganze?

- Algorithmen stehen im Mittelpunkt der Informatik
- Entwurfsziele bei Entwicklung von Algorithmen:
  1. Korrektheit Cool! Wir werden Beweise führen
  2. Terminierung Kommt später im Studium
  3. Effizient Doof kann es (fast) jeder
- Wahl der Datenstrukturen ist für Effizienz entscheidend
- Schwerpunkt der Vorlesung: Entwurf von effizienten Algorithmen und Datenstrukturen, sowie die nachfolgende Analyse ihres Verhaltens

Wozu das Ganze?

- Funktional gleichwertige Algorithmen weisen oft erhebliche Unterschiede in der Effizienz (Komplexität) auf.
- Bei der Verarbeitung soll effektiv mit den Daten umgegangen werden.
- Die Effizienz hängt bei großen Datenmengen ab von
  - internen Darstellung der Daten
  - dem verwendeten Algorithmus
- Zusammenhang dieser Aspekte?

Beispiel Telefon-CD

- 700 MB Speicherplatz
- 40 Millionen Telefone $\times$ 35 Zeichen (Name Ort Nummer) 1.4 GB ASCII-Text
- passt nicht
- Wir brauchen eine Komprimierung der Daten, und eine Möglichkeit schnell (mittels eines Index) zu suchen.
- (Technische Nebenbemerkung: ausserdem ist der Speicherzugriff auf der CD sehr langsam)

Beispiel Telefon-CD

- Design-Überlegungen:
  Wir könnten eine Datenstruktur verwenden, die die vollständige Verwaltung der Einträge erlaubt: Suchen, Einfügen und Löschen.
- Weil sowieso nur das Suchen erlaubt ist, können wir vielleicht eine Datenstruktur verwenden, die zwar extrem schnelles Suchen in einer komprimierten Datei erlaubt, aber möglicherweise kein Einfügen.
- Also: Mitdenken kann helfen

Effizienz: Zeit und Speicher

- Die Abarbeitung von Programmen (Software) beansprucht 2 Ressourcen:
  Zeit und Hardware (wichtig: Speicher).
- FRAGE: Wie steigt dieser Ressourcenverbrauch bei größeren Problemen (d.h. mehr Eingabedaten)?
- Es kann sein, dass Probleme ab einer gewissen Größe praktisch unlösbar sind, weil
  1. Ihre Abarbeitung zu lange dauern würde (z.B. länger als ein Informatikstudium) oder
  2. Das Programm mehr Speicher braucht, als zur Verfügung steht.
- Wichtig ist auch der Unterschied zwischen RAM und externem Speicher, da der Zugriff auf eine Festplattex ca. 100.000 mal langsamer ist als ein RAM-Zugriff. Deshalb werden manche Algorithmen bei Überschreiten des RAM so langsam, dass sie praktisch nutzlos sind.

Komplexität von Algorithmen

- **Wesentliche Maße**:
  - Rechenzeitbedarf (Zeitkomplexität)
  - Speicherplatzbedarf (Speicherplatzkomplexität)
- **Programmlaufzeit von zahlreichen Faktoren abhängig**
  - Eingabe für das Programm
  - Qualität des vom Compiler generierten Codes und des gebundenen Objektprogramms
  - Leistungsfähigkeit der Maschineninstruktionen, mit deren Hilfe das Programm ausgeführt wird
  - Zeitkomplexität des Algorithmus, der durch das ausgeführte Programm verkörpert wird
- **Bestimmung der Komplexität**
  - Messungen auf einer bestimmten Maschine
  - Aufwandsbestimmungen für idealisierten Modellrechner (Bsp.: Random-Access-Maschine oder RAM)
  - Abstraktes Komplexitätsmaß zur asymptotischen Kostenschätzung in Abhängigkeit zur Problemgöße (Eingabegröße) n

Asymptotische Kostenmaße

Festlegung der Größenordnung der Komplexität in Abhängigkeit der Eingabegröße:
Best Case, Worst Case, Average Case
Meist Abschätzung der oberen Schranke (für den Worst Case):
Gross-Oh-Notation
Zeitkomplexität $T(n)$ eines Algorithmus ist von der Größenordnung n, wenn es Konstanten n_0 und $c > 0$ gibt, so daß für alle Werte von $n > n_0$ gilt:

$$T(n) \leq c \cdot n$$

man sagt "$T(n)$ ist in $O(n)$", in Zeichen $T(n) \in O(n)$ oder einfach $T(n) = O(n)$.

Allgemeine Definition

Jetzt wird's ernst

Die Klasse $O(f)$ der Funktionen von der Grössenordnung f is

$$O(f) = \{g | \exists c > 0 \exists n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq cf(n)\}$$

also eigentlich ganz einfach

Beispiel: $T(n) = 6n^4 + 3n^2 - 7n + 42 \log n + \sin\cos(2n)$
Behauptung: $T(n) \in O(n^4)$.
Beweis: Für $n \geq 1$ gilt: $n^4 \geq n^3 \geq n^2 \geq n \geq logn$ und
$n^4 \geq 1 \geq \sin(\mathrm{irgendwas})$. Also ist
$(6 + 3 + 7 + 42 + 1)n^4$ jedenfall grösser als $T(n)$.
Damit hätten wir die geforderten konstanten gefunden:
$n_0 = 1$ und $c = 59$.
Alles klar?
$g(n) \in O(n)$ impliziert $g(n) \in O(n \log n)$ impliziert $g(n) \in O(n^2)$
(warum?)

Untere Schranken

$g \in \Omega(f)$ meint, dass g mindestens so stark wächst wie f (untere Schranke).
Definition:

$$\Omega(f) = \{h | \exists c > 0 \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 : h(n) \geq cf(n)\}$$

Bemerkung: alternativ kann man definieren:

$$\Omega(f) = \{h | \exists c > 0 : \exists \text{ unendlich viele } n : h(n) \geq cf(n)\}$$

Exakte Schranke

gilt sowohl $g \in O(f)$ als auch $g \in \Omega(f)$ schreibt man $g \in \Theta(f)$.

Also:
$g \in \Theta(f)$ bedeutet: die Funktion g verläuft für hinreichend große n im Bereich $[c_1 f, c_2 f]$ mit geeigneten Konstanten c_1 und c_2.

Ist $T(n)$ ein Polynom vom Grad p dann ist $T(n) \in \Theta(n^p)$

Wachstumsordnung = höchste Potenz

Wichtige Wachstumsfunktionen

$O(1)$	konstante Kosten
$O(logn)$	logarithmisches Wachstum
$O(n)$	lineares Wachstum
$O(n \log n)$	$n \log n$-Wachstum
$O(n2)$	quadratisches Wachstum
$O(n3)$	kubisches Wachstum
$O(2n)$	exponentielles Wachstum
$O(n!)$	Wachstum der Fakultät/Faktorielle $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

HAUSÜBUNG und zum NACHDENKEN: Rechnen Sie das für $n = 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000$ mal aus. Was passt noch auf ihren Laptop?

Problemgröße bei vorgegebener Zeit

Welche Größe von n kann bei gegebener Komplexität in den vorgegebenen Zeiten t_1, t_2 und t_3 bearbeitet werden?

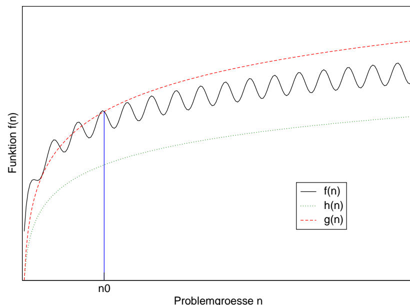
Komplexität	t_1	t_2	t_3
$\log_2 n$	2^{1000}	2^{60000}	$2^{3600000}$
n	1000	60000	3600000
$n \log_2 n$	140	4893	20000
n^2	31	244	1897
n^3	10	39	153
2^n	9	15	21

Zeitkomplexitätsklassen

- linear-zeitbeschränkt, $T \in O(n)$
- polynomial-zeitbeschränkt, $T \in O(n^K)$
- exponentiell-zeitbeschränkt, $T \in O(\alpha^n)$

Exponentiell-zeitbeschränkte Algorithmen im Allgemeinen (große n) nicht nutzbar. Probleme, für die kein polynomial-zeitbeschränkter Algorithmus existiert, gelten als unlösbar (intractable).

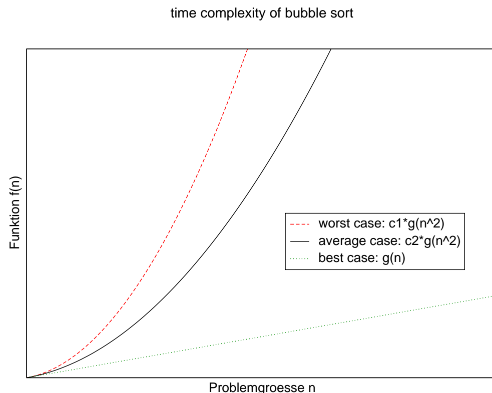
Schranken graphisch dargestellt



$$f(n) = a \times \log n + b \times \sin(c \times n) + d$$
$$g(n) = c_1 \times \log n$$
$$h(n) = c_2 \times \log n;\ c_2 < c_1$$
$$g, h \in \Theta(\log n) \text{ für } n > n_0$$

$f(n)$ ... beschreibt das Zeitverhalten eines Algorithmus
$g(n)$ ... obere Schranke für $n > n_0$; $g(n) \in O(f(n))$
$h(n)$ ... untere Schranke für $n > 0$; $h(n) \in \Omega(f(n))$
$h(n) \in O(f(n))$ bzw. $g(n) \in \Omega(f(n))$ ergibt exakte Schranke
$g, h \in \Theta(f(n))$

Zeitkomplexität von Bubble Sort – Vorschau



Obere, untere und exakte Schranke können jeweils für worst, average und best case angegeben werden. Immer jedoch für grosse n!

Berechnung der Zeitkomplexität I:

- Elementare Operationen (Zuweisungen, Ein/Ausgabe) $O(1)$
- **Summenregel**:
  T_1 und T_2 seien die Laufzeiten zweier Programmfragmente P_1 und P_2; es gelte $T_1(n) \in O(f(n))$ und $T_2(n) \in O(g(n))$.
  $$T_1(n) + T_2(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$$
- **Produktregel**: für geschachtelte Schleifenausführung von P_1 und P_2:
  $$T1(n) \cdot T2(n) \in O(f(n)g(n))$$
- **Fallunterscheidungen** $O(1)$
- **Schleife** Produkt aus Anzahl der Schleifendurchläufe mit Kosten der teuersten Schleifenausführung
- **rekursive Prozeduraufrufe**: Produkt aus Anzahl der rekursiven Aufrufe mit Kosten der teuersten Prozedurausführung

Maximale Teilsumme

Gegeben ist eine Liste von Zahlen. Gesucht ist die maximale Summe, die aus benachbarten Elementen der Liste gebildet werden kann.

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Elemente	+5	-6	+4	+2	-5	+7	-2	-7	+3	+5

```
int maxSubSum( int[] a) {
   int maxSum = 0;
   for( i=0; i<a.length; i++)
      for( j=i; j<a.length; j++) {
        int thisSum =0;
        for (int k = i; k<=j; k++)
           thisSum += a[k];
        if(thisSum>maxSum) maxSum=thisSum;
      }
   return maxSum;
}
```

Maximale Teilsumme: Analyse

- die Problemgröße n ist die Länge der Liste (`a.length`)
- Innerste Schleife `for( k=i; k<=j; k++)`
  $j - i + 1$ mal durchlaufen fuer jedes i, j.
- Mittlere Schleife `for( j=i; j<n; j++)`
  jeweils $j - i + 1$ Aktionen
  $\rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots n - i = (n-i)(n-i+1)/2$ Aktionen
- äußere Schleife `for( i=0; i<n; i++)`
  aufsummieren ueber den Aufwand des Durchlaufes für jedes i
- Beispiel: für $n = 32$ sind 5984 Additionen erforderlich

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{k=i}^{j} 1 = \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} (j - i + 1) \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-i} l =$$

$$= \sum i = 0^{n-1} (n-i)(n-i+1)/2 = \sum_{k=1}^{n} k(k+2)/2 = n^3/6 + n^2/2 + n/3$$

Rekursion vs. Iteration I

Fibonacci Zahlen: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$.

```
Int fibRekursiv (int n) {
  if (n <=0) return 0;
  else if (n ==1) return 1;
  else return fibRekursiv (n-2) +
  fibRekursiv (n-1)
}
```

Exponentieller Aufwand!

```
Int fibIterativ (int n) {
  if (n <=0) return 0;
  else {
    int aktuelle=1, vorherige=0, temp=1,
    for (int i=1; i<n; i++) {
      temp = aktuelle;
      aktuelle += vorherige;
      vorherige = temp;}
    return aktuelle;
  }
}
```

Linearer Aufwand

Rekursion vs. iteration: $n!$

```
int fakRekursive(int n) {
   if(n<=1) return 1;
   else return n*fak(Rekursive(n-1));
}
```

Speicheraufwand $\Omega(n)$

```
int fakIterativ(int n) {
   int fak=1;
   for (int i=2;i<=n;i++) fak *= i;
   return fak;
}
```

Speicheraufwand $\Omega(1)$
Bessere Abschätzung: Wie wächst der Aufwand mit der bei der Multiplikation großer Zahlen?
Einfach zum Nachdenken:
Was ist der Speicheraufwand für n und für $n!$

Multiplikation für Fortgeschrittene

Wie in der Schule:

```
5432*1995
5432
48888
 48888
  27160
-------
10836840
```

$\Longrightarrow O(\ell^2)$ für ℓ-stellige Zahlen.
Besser:
$(100A + B) \times (100C + D) = 10000AC + 100(AD + BC) + BD$
nur 3 Multiplikationen von Zahlen der halben Länge:

$$T(n) = 3T(n/2)$$

wobei der Aufwand für die Addition vernachlässigt wird.
Lösung: $T(n) = n^{\log_2 3} \approx n^{1.585} \ll n^2$
für *große* Zahlen geht's also intelligenter als in der Schule

Noch ein paar Beispiele

- Exponentielles Wachstum:
  $T(n+1) = aT(n)$ ... daher ...
  $T(n) = aT(n-1) = a^2T(n-2) = a^kT(n-k) = a^nT(0) = 2^{\log_2 an}$
  “Skalengröße” $k = \log_2 a$
- Fibonacci Zahlen:
  *Binet*sche Formel: $F_n = (A^n - B^n)/\sqrt{5}$ mit
  $A = (1+\sqrt{5})/2$ und $B = (1-\sqrt{5})/2$.
  umschreiben: $F_n = (1/\sqrt{5})A^n[1-(B/A)^n]$
  $(B/A)^n = (-1)^n[(\sqrt{5}-1)/(\sqrt{5}+1)]^n \to 0$ für große n
  Daher $F_n < cA^n$ für hinreichend große n, d.h.
  $F_n \in O(A^n)$. Genaugenommen sogar $F_n \in \Theta(A^n)$

Das Mastertheorem

- Allgemeines Theorem zur Lösung von Funktionalgleichungen (Rekursionsgleichungen) der Form

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + g(n),\ a \geq 1, b > 1$$

- Funktionalgleichung beschreibt *algorithmische Strategie*: Zerlege Problem der Größe n in b Teilprobleme.
- Lösung des Gesamtproblems koste das a-fache der Lösung eines Teilproblems
- zusätzlich entstehen einmalige overhead Kosten $g(n)$

Das Mastertheorem — Polynomial

- Es gibt mehrere Lösungen je nach Verhalten von $g(n)$.
- Sei jetzt $g(n)$ polynomial, d.h. $g(n) = \Theta(n^k)$:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^k),\ a \geq 1, b > 1$$

- Dann ist

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{falls } a < b^k \\ \Theta(n^k \log n) & \text{falls } a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b(a)}) & \text{falls } a > b^k \end{cases}$$

Das Mastertheorem — Beispiele

Sei wieder $g(n)$ polynomial, $g(n) = \Theta(n^k)$.
Betrachte den Fall $k = 2$ und $b = 3$:

$$a = 8 \quad T(n) = 8T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(n^2) \quad \Rightarrow \quad T(n) = \Theta(n^2)$$

$$a = 9 \quad T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(n^2) \quad \Rightarrow \quad T(n) = \Theta(n^2 \log_2 n)$$

$$a = 10 \quad T(n) = 10T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(n^2) \quad \Rightarrow \quad T(n) = \Theta(n^{\log_3 10})$$

Das Mastertheorem — allgemein

Setze $u = log_b(a)$.
Zur Erinnerung: Falls $g(n) = 0$ dann ist $T(n) = \Theta(n^u)$, vgl. Analyse des verbesserten Multiplikationsverfahrens. Dieses Gesetz markiert den Fall ohne Overhead-Kosten.

Allgemeine Lösung

- Falls $g(n) = O(n^{u-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$, dann ist $T(n) = \Theta(n^u)$.
- Falls $g(n) = \Theta(n^u)$, dann ist $T(n) = \Theta(n^u \log n)$
- Falls $g(n) = \Omega(n^{u+\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ und $ag(\frac{n}{b}) \leq cg(n)$, dann ist $T(n) = \Theta(g(n))$

Zusammenfassung

- Komplexität / Effizienz wesentliche Eigenschaft von Algorithmen
- meist asymptotische Worst-Case-Abschätzung in Bezug auf Problemgröße n
  - Unabhängigkeit von konkreten Umgebungsparametern (Hardware, Betriebsystem, ...)
  - asymptotisch "schlechte" Verfahren können bei kleiner Problemgröse ausreichen
- wichtige Klassen: $O(1)$, $O(\log n)$, $O(n)$, $O(nlogn)$, $O(n^2)$, $\dots$, $O(2^n)$
- zu gegebener Problemstellung gibt es oft Algorithmen mit stark unterschiedlicher Komplexität
  - unterschiedliche Lösungsstrategien
  - Raum vs. Zeit: Zwischenspeichern von Ergebnissen statt mehrfacher Berechnung
  - Iteration vs. Rekursion
- Bestimmung der Komplexität aus Programmfragmenten