ADS: Algorithmen und Datenstrukturen

Teil XII

Peter F. Stadler & Konstantin Klemm

Bioinformatics Group, Dept. of Computer Science & Interdisciplinary Center for Bioinformatics, **University of Leipzig**

27. Januar 2010

Analyse des Hashing: Kostenmaße

- $\beta = n/m$: Belegung von HT mit n Schlüsseln
- $S(\beta) =$ Anzahl Suchschritte für das Auffinden eines Schlüssels - entspricht den Kosten für erfolgreiche Suche und Löschen (ohne Reorganisation)
- $U(\beta) =$ Anzahl Suchschritte für die erfolglose Suche — das Auffinden des ersten freien Platzes — entspricht den Einfügekosten

Grenzwerte:		best case:	worst case:
	$S(\beta) =$	1	n
	$U(\beta) =$	1	$n+1$

Analyse: Lineares Sondieren

- Sobald β eine gewisse Größe überschreitet, verschlechtert sich das Zugriffsverhalten sehr stark.
- Je länger eine Liste ist, umso schneller wird sie noch länger.
- Zwei Listen können "zusammenwachsen", so dass durch neue Schlüssel eine Art Verdopplung der Listenlänge eintreten kann
- Ergebnisse für das lineare Sondieren nach Knuth:

$$S(\beta) \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\beta}\right) \quad , \qquad U(\beta) \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\beta)^2}\right)$$

mit $0 \leq \beta = \frac{n}{m} < 1$.

Analyse: uniformes Sondieren, erfolglose Suche

Annahme: Sondierungsfolgen zu verschiedenen Schlüsseln sind unkorreliert (zufällig). *Kumulierte* Wahrscheinlichkeit, daß erfolglose Suche *mindestens i* Schritte braucht:

$$q_i = \frac{n}{m}\,\frac{n-1}{m-1}\,\frac{n-2}{m-2}\cdots\frac{n-i+2}{m-i+2} \leq \left(\frac{n}{m}\right)^{i-1} = \beta^{i-1}$$

Erwartungswert ist Summe der kumulierten Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} U(\beta) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \\ &= \frac{1}{1-\beta} \end{aligned}$$

Analyse: uniformes Sondieren, erfolgreiche Suche

Bei erfolgreicher Suche wird dieselbe Sondierungsfolge wie beim Einfügen des Schlüssels durchlaufen. Für den als $(i+1)$-tes eingefügten Schlüssel entspricht dies einer erfolglosen Suche in einer HT der Länge m mit i Schlüsseln. Kosten hierfür

$$u_i = \frac{1}{1-\frac{i}{m}} = \frac{m}{m-i}$$

Mittelwert über alle n Schlüssel

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u_i = \frac{m}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{m-i} = \beta^{-1}\sum_{i=m-n-1}^{m}\frac{1}{i} \\ &\leq \beta^{-1}\int_{i=m-n}^{m}\frac{1}{i}\mathrm{d}i = \beta^{-1}\ln\frac{m}{m-n} \\ &= \frac{1}{\beta}\ln\frac{1}{1-\beta} \end{aligned}$$

Analyse: Verkettung, erfolglose Suche

- Annahme: n Schlüssel verteilen sich gleichförmig über die m möglichen Ketten.
- Jede Synonymkette hat also im Mittel $n/m = \beta$ Schlüssel.

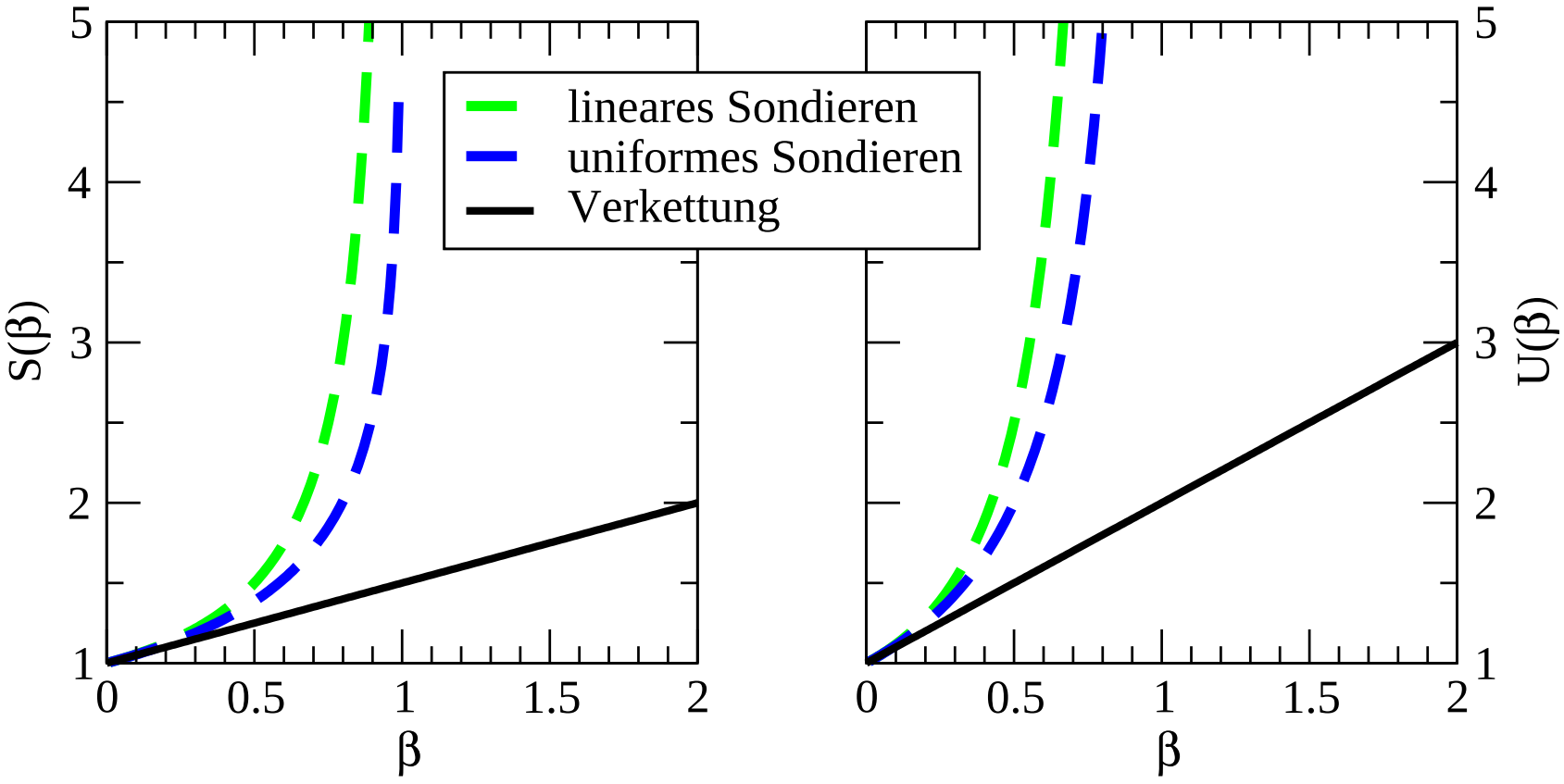
$$U(\beta) = 1 + \beta$$

Analyse: Verkettung, erfolgreiche Suche

- Sondierungsfolge bei erfolgreicher Suche von k = Sondierungsfolge beim Einfügen von k
- Beim Einfügen des $(i+1)$-ten Schlüssels sind i Schlüssel in der HT. Von diesen im Mittel i/m in derselben Kette wie k.

$$
\begin{aligned}
S(\beta) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\frac{i-1}{m}\right] = 1+\frac{1}{nm}\,\frac{n(n-1)}{2} && (1)\\
&= 1+\frac{n-1}{2m} && (2)\\
&< 1+\frac{\beta}{2} && (3)
\end{aligned}
$$

Analyse des Hashing: Vergleich



$\Rightarrow$ Verkettung hat deutlich geringeren Zeitaufwand als offenes Hashing für Belegungsfaktor β nahe 1

Hashing auf Externspeichern I

Hash-Adresse bezeichnet Bucket (hier: Seite)

- Kollisionsproblem wird entschärft, da mehr als ein Satz auf seiner Hausadresse gespeichert werden kann
- Bucket-Kapazität $b \rightarrow$ Primärbereich kann bis zu bm Sätze aufnehmen.

Überlaufbehandlung

- Überlauf tritt erst beim $(b+1)$-ten Synonym auf
- alle bekannten Verfahren sind möglich, aber lange Sondierungsfolgen im Primärbereich sollten vermieden werden
- häufig Wahl eines separaten Überlaufbereichs mit dynamischer Zuordnung der Buckets

Speicherungsreihenfolge im Bucket

- ohne Ordnung (Einfügefolge)
- nach der Sortierfolge des Schlüssels: aufwendiger, jedoch Vorteile beim Suchen (sortierte Liste!)

Hashing auf Externspeichern II

Bucket-Größe meist Seitengröße (Alternative: mehrere Seiten / Spur einer Magnetplatte)

- Zugriff auf die Hausadresse bedeutet 1 physische E/A
- jeder Zugriff auf ein Überlauf-Bucket löst weiteren physischen E/A-Vorgang aus

Bucket-Adressierung mit separaten Überlauf-Buckets

- weithin eingesetztes Hash- Verfahren für Externspeicher
- jede Kollisionsklasse hat eine separate Überlaufkette.

Hashing auf Externspeichern III

Grundoperationen

- direkte Suche: nur in der Bucket-Kette
- sequentielle Suche ?
- Einfügen: ungeordnet oder sortiert
- Löschen: keine Reorganisation in der Bucket-Kette - leere Überlauf-Buckets werden entfernt

Dynamische Hash-Verfahren I

Wachstumsproblem bei statischen Verfahren

- Statische Allokation von Speicherbereichen: Speicherausnutzung?
- Bei Erweiterung des Adressraumes: Re-Hashing $\Rightarrow$ Alle Sätze erhalten eine neue Adresse
- Probleme: Kosten, Verfügbarkeit, Adressierbarkeit

Dynamische Hash-Verfahren II

Entwurfsziele

- Eine im Vergleich zum statischen Hashing dynamische Struktur, die Wachstum und Schrumpfung des Hash-Bereichs (Datei) erlaubt
- Keine Überlauftechniken

Erweiterbares Hashing

- Die einzelnen Bits eines Schlüssels steuern der Reihe nach den Weg durch den zur Adressierung benutzten Digitalbaum $K_i = (b_0, b_1, b_2, \dots)$
- Verwendung der Schlüsselwerte kann bei Ungleichverteilung zu unausgewogenem Digitalbaum führen (Digitalbäume kennen keine Höhenbalancierung!)
- Verwendung von $h(K_i)$ als sog. Pseudoschlüssel (PS) soll bessere Gleichverteilung gewährleisten. $h(K_i) = (b_0, b_1, b_2, \dots)$
- Digitalbaum-Adressierung bricht ab, sobald ein Bucket den ganzen Teilbaum aufnehmen kann.

Beispiel $\rightarrow$ Tafel