ADS: Algorithmen und Datenstrukturen

Teil XI

Peter F. Stadler & Konstantin Klemm

Bioinformatics Group, Dept. of Computer Science & Interdisciplinary Center for Bioinformatics, **University of Leipzig**

20. Januar 2010

Hashing

- Hash-Funktionen
  - Divisionsrest-Verfahren
  - Faltung
  - Mid-Square-Methode, ...
- Behandlung von Kollisionen
  - Verkettung der Überläufer
  - Offene Hash-Verfahren: lineares Sondieren, quadratisches Sondieren, ...
- Analyse des Hashing
- Hashing auf Externspeichern
  - Bucket-Adressierung mit separaten Überlauf-Buckets
  - Analyse
- Dynamische Hash-Verfahren
  - Erweiterbares Hashing
  - Lineares Hashing

Hashing

Gibt es bessere Strukturen für direkte Suche für Haupt- und Externspeicher ???

- AVL-Baum: $O(\log_2 n)$ Vergleiche
- B*-Baum: E/A-Kosten $O(\log_k(n))$, vielfach 3 Zugriffe

Bisher:

- Suche über Schlüsselvergleich
- Allokation des Satzes als physischer Nachbar des "Vorgängers" oder beliebige Allokation und Verknüpfung durch Zeiger

Gestreute Speicherungsstrukturen / Hashing (Schlüsseltransformation, Adreßberechnungsverfahren, scatter-storage technique usw.)

- Berechnung der Satzadresse $SA(i)$ aus Satzschlüssel $K_i \rightarrow$ Schlüsseltransformation
- Speicherung des Satzes bei $SA(i)$
- Ziele: schnelle direkte Suche + Gleichverteilung der Sätze (möglichst wenig Synonyme)

Hashing

Definition.

- S sei Menge aller möglichen Schlüsselwerte eines Satztyps (Schlüsselraum). $A = 0, 1, \ldots m-1$ sei Intervall der ganzen Zahlen von 0 bis $m-1$ zur Adressierung eines Arrays bzw. einer Hash-Tabelle mit m Einträgen.
- Eine Hash-Funktion $h : S \longrightarrow A$ ordnet jedem Schlüssel $s \in S$ des Satztyps eine Zahl $h(s)$ aus A als Adresse in der Hash-Tabelle zu.

Idealfall: 1 Zugriff zur direkten Suche
Problem: Kollisionen $\ldots h(s) = h(s')$

Perfektes Hashing: Direkte Adressierung

Idealfall (perfektes Hashing): keine Kollisionen

- h ist eine injektive Funktion.
- Für jeden Schlüssel aus S muss Speicherplatz bereitgehalten werden, d. h., die Menge aller möglichen Schlüssel ist bekannt.

Parameter

- l Schlüssellänge, b = Basis, m = #Speicherplätze
- $n_p = \#S = b^l$ mögliche Schlüssel
- $n_a = \#K = \#$ vorhandene Schlüssel
- Wenn K bekannt ist und K fest bleibt, kann leicht eine injektive Abbildung $h : K \rightarrow \{0, ..., m-1\}$
  z. B. wie folgt berechnet werden:
- Die Schlüssel in K werden lexikographisch geordnet und auf ihre Ordnungsnummern abgebildet oder
- Der Wert eines Schlüssels K_i oder eine einfache ordnungserhaltende Transformation dieses Wertes (Division/Multiplikation mit einer Konstanten) ergibt die Adresse:

$$A_i = h(K_i) = K_i$$

Beispiel: Direkte Adressierung

- Beispiel: Schlüsselmenge $\{00, ..., 99\}$
- Eigenschaften
  - Statische Zuordnung des Speicherplatzes
  - Kosten für direkte Suche und Wartung ?
  - Reihenfolge beim sequentiellen Durchlauf ?
- Bestes Verfahren bei geeigneter Schlüsselmenge K, aber aktuelle Schlüsselmenge K ist oft nicht "dicht":
  - eine 9-stellige Sozialversicherungsnummer bei 105 Beschäftigten
  - Namen / Bezeichner als Schlüssel (Schlüssellänge k): Faktor 10^4

Allgemeines Hashing

Annahmen

- Die Menge der möglichen Schlüssel ist meist sehr viel größer als die Menge der verfügbaren Speicheradressen
- h ist nicht injektiv

Definitionen

- Zwei Schlüssel K_i, K_j *kollidieren* (bzgl. einer Hash-Funktion h) genau dann wenn $h(K_i) = h(K_j)$.
- Tritt für K_i und K_j eine Kollision auf, so heißen diese Schlüssel *Synonyme*.
- Die Menge der Synonyme bezüglich einer Speicheradresse A_i heißt Kollisionsklasse.

k Personen auf einer Party haben gleichverteilte und stochastisch unabhängige Geburtstage. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $p(n, k)$ haben mindestens 2 von k Personen am gleichen Tag ($n = 365$) Geburtstag?!
Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Kollision auftritt, ist

$$q(n,k) = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^{k-1}}$$

Es ist $p(365, k) = 1 - q(365, k) > 0.5$ für $k > 22$
(zb `http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/wkeit/geburtstag/`)
ALSO: Behandlung von Kollisionen erforderlich !

Hash-Verfahren: Einflußfaktoren I

Leistungsfähigkeit eines Hash-Verfahrens: Einflußgrößen und Parameter

- Hash-Funktion
- Datentyp des Schlüsselraumes: Integer, String, ...
- Verteilung der aktuell benutzten Schlüssel
- Belegungsgrad der Hash-Tabelle HT
- Anzahl der Sätze, die sich auf einer Adresse speichern lassen, ohne Kollision auszulösen (Bucket-Kapazität)
- Technik zur Kollisionsauflösung
- ggf. Reihenfolge der Speicherung der Sätze

Einflußfaktoren II

Belegungsfaktor der Hash-Tabelle

- Verhältnis von aktuell belegten zur gesamten Zahl an Speicherplätzen $\beta = n_a/m$
- für $\beta > 0.85$ erzeugen alle Hash-Funktionen viele Kollisionen und damit hohen Zusatzaufwand
- Hash-Tabelle ausreichend groß zu dimensionenieren ($m > n_a$)

Für die Hash-Funktion h gelten folgende Forderungen:

- Sie soll sich einfach und effizient berechnen lassen (konstante Kosten)
- Sie soll eine möglichst gleichmäßige Belegung der Hash-Tabelle HT erzeugen, auch bei ungleich verteilten Schlüsseln
- Sie soll möglichst wenige Kollisionen verursachen

Hash-Funktionen I: Divisions-Verfahren

1. Divisionsrest-Verfahren: $h(K_i) = K_i \bmod q, (q \sim m)$
Der entstehende Rest ergibt die relative Adresse in HT
Beispiel:
Die Funktion *nat* wandle Namen in natürliche Zahlen um:
$nat(Name) = ord(1.BuchstabevonName) - ord('A')$
$h(Name) = nat(Name) \bmod m$

- Wichtigste Forderung an Divisor q:
  q = Primzahl (größte Primzahl $\leq m$)
- Hash-Funktion muß etwaige Regelmäßigkeiten in Schlüsselverteilung eliminieren, damit nicht ständig die gleichen Plätze in HT getroffen werden
- Bei äquidistantem Abstand der Schlüssel $K_0 + jK$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ maximiert eine Primzahl die Distanz, nach der eine Kollision auftritt. Eine Kollision ergibt sich, wenn

  $$K_0 = (K0 + jK) \bmod q$$

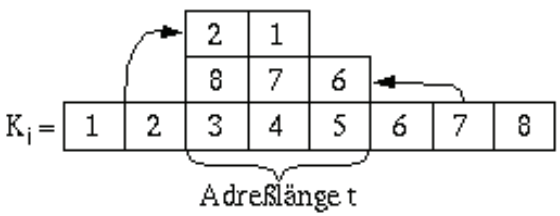
  d.h. $jK = kq$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.
- Eine Primzahl q kann keine gemeinsamen Faktoren mit K besitzen, die den Kollisionsabstand verkürzen würden

Hash-Funktionen II: Faltung

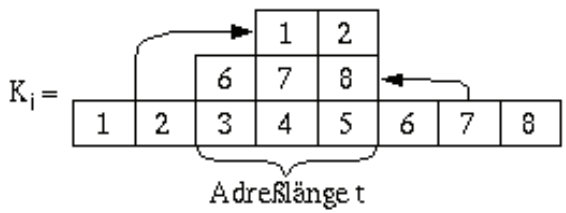
Schlüssel wird in Teile zerlegt, die bis auf das Letzte die Länge einer Adresse für HT besitzen
Schlüsselteile werden dann übereinandergefaltet und addiert.
Variationen:

- Rand-Falten: wie beim Falten von Papier am Rand
- Shift-Falten: Teile des Schlüssels werden übereinandergeschoben
- Sonstige: z.B. XOR-Verknüpfung bei binärer Zeichendarstellung
- Beispiel: $b = 10$, $t = 3$, $m = 10^3$

Rand-Falten



Shift Falten



Faltung

- verkürzt lange Schlüssel auf "leicht berechenbare" Argumente, wobei alle Schlüsselteile Beitrag zur Adreßberechnung liefern
- diese Argumente können dann zur Verbesserung der Gleichverteilung mit einem weiteren Verfahren "gehasht" werden

Hash-Funktionen III

Mid-Square-Methode

- Schlüssel K_i wird quadriert. t aufeinanderfolgende Stellen werden aus der Mitte des Ergebnisses für die Adressierung ausgewählt.
- Es muss also $b^t = m$ gelten.
- mittlere Stellen lassen beste Gleichverteilung der Werte erwarten
- Beispiel für $b = 2$, $t = 4$, $m = 16$: $K_i = 1100100$

$$K_i^2 = 10011\underbrace{1000}_{t}1000 \qquad \rightarrow \qquad h(K_i) = 1000$$

Hash-Funktionen IV

- **Zufallsmethode:**
  K_i dient als Saat für Zufallszahlengenerator
- **Ziffernanalyse:**
  setzt Kenntnis der Schlüsselmenge K voraus. Die t Stellen mit der besten Gleichverteilung der Ziffern oder Zeichen in K werden von K_i zur Adressierung ausgewählt
- **Problemangepaßte Methoden:**
  Unter Ausnutzung von speziellen Eigenschaften der Schlüssel wird versucht, eine möglichst günstige Hashfunktion zu konstruieren. Im günstigsten Fall erhält man so eine Hashfunktion, die injektiv und effektiv zu berechnen ist.

Bewertung von Hash-Funktionen

Verhalten / Leistungsfähigkeit einer Hash-Funktion hängt von der gewählten Schlüsselmenge ab

- Deshalb lassen sie sich auch nur unzureichend theoretisch oder mit Hilfe von analytischen Modellen untersuchen
- Wenn eine Hash-Funktion gegeben ist, läßt sich immer eine Schlüsselmenge finden, bei der sie besonders viele Kollisionen erzeugt
- Keine Hash-Funktion ist immer besser als alle anderen

Über die Güte der verschiedenen Hash-Funktionen liegen jedoch eine Reihe von empirischen Untersuchungen vor

- Das Divisionsrest-Verfahren ist im Mittel am leistungsfähigsten; für bestimmte Schlüsselmengen können jedoch andere Techniken besser abschneiden
- Wenn die Schlüsselverteilung nicht bekannt ist, dann ist das Divisionsrest-Verfahren die bevorzugte Hash-Technik
- Wichtig dabei: ausreichend große Hash-Tabelle, Verwendung einer Primzahl als Divisor

Behandlung von Kollisionen

Zwei Ansätze, wenn $h(K_q) = h(K_p)$

- K_p wird in einem separaten Überlaufbereich (außerhalb der Hash-Tabelle) zusammen mit allen anderen Überläufern gespeichert; Verkettung der Überläufer
- Es wird für K_p ein freier Platz innerhalb der Hash-Tabelle gesucht ("Sondieren"); alle Überläufer werden im Primärbereich untergebracht ("offene Hash-Verfahren")

Methode der Kollisionsauflösung entscheidet darüber, welche Folge und wie viele relative Adressen zur Ermittlung eines freien Platzes aufgesucht werden
Adressfolge bei Speicherung und Suche für Schlüssel K_p sei $h_0(K_p)$, $h_1(K_p)$, $h_2(K_p)$, ...

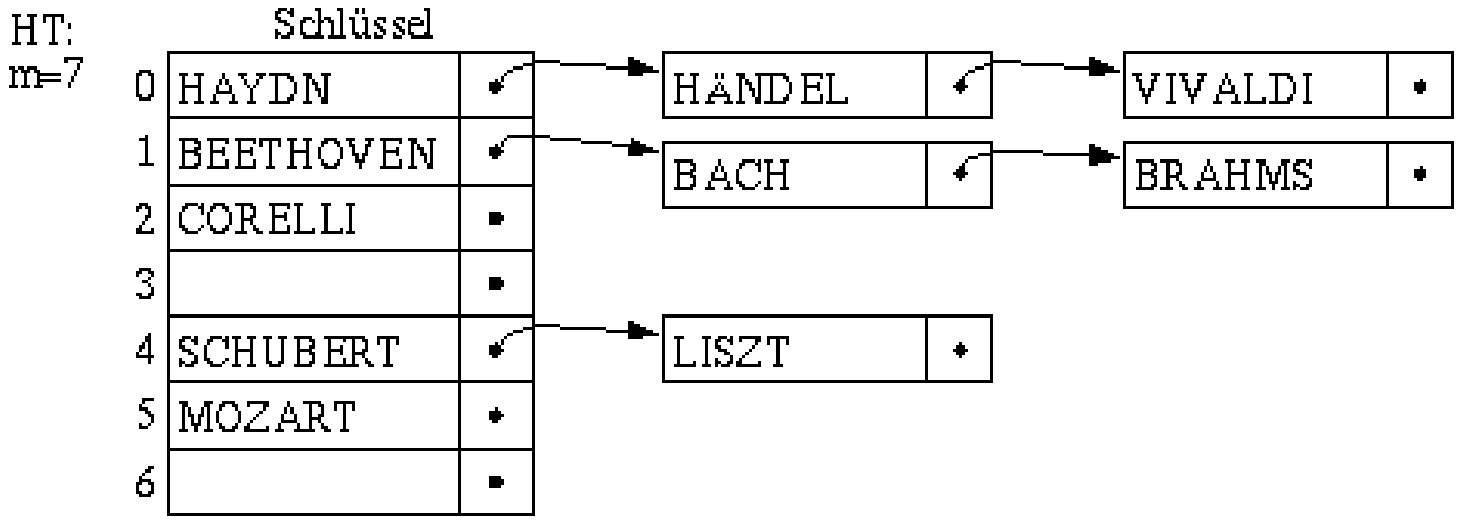
- Bei einer Folge der Länge n treten also $n-1$ Kollisionen auf
- Primärkollision: $h(K_p) = h(K_q)$
- Sekundärkollision: $h_i(K_p) = h_j(K_q)$, $i \neq j$

Hash-Verfahren mit Verkettung der Überläufer (separater Überlaufbereich)

Dynamische Speicherplatzbelegung für Synonyme

- Alle Sätze, die nicht auf ihrer Hausadresse unterkommen, werden in einem separaten Bereich gespeichert (Überlaufbereich)
- Verkettung der Synonyme (Überläufer) pro Hash-Klasse
- Suchen, Einfügen und Löschen sind auf Kollisionsklasse beschränkt
- Unterscheidung nach Primär- und Sekundärbereich: $n > m$ ist möglich!

Hash-Verfahren mit Verkettung der Überläufer (separater Überlaufbereich)



Entartung zur linearen Liste prinzipiell möglich
Nachteil: Anlegen von Überläufern, auch wenn Hash-Tabelle (Primärbereich) noch wenig belegt ist

Offene Hash-Verfahren: Lineares Sondieren

Eigenschaften:

- Speicherung der Synomyme (Überläufer) im Primärbereich
- Hash-Verfahren muß in der Lage sein, eine Sondierungsfolge, d.h. eine Permutation aller Hash-Adressen, zu berechnen

Lineares Sondieren (linear probing)
Von der Hausadresse (Hash-Funktion h) aus wird sequentiell (modulo der Hash-Tabellen-Größe) gesucht. Offensichtlich werden dabei alle Plätze in HT erreicht:

$$h_0(K_p) = h(K_p)$$

$$h_i(K_p) = (h_0(K_p) + i) \mod m,\ i = 1, 2, \ldots$$

Häufung von Kollisionen durch "Klumpenbildung" $\Longrightarrow$ lange Sondierungsfolgen möglich

Lineares Sondieren: Beispiel

Einfügereihenfolge 79, 28, 49, 88, 59

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
								28	79

$h_0(K_p) = h(K_p) = K_p \mod 10$

$h_i(K_p) = (K_p + i) \mod 10,\ i = 1, 2, \ldots$

Lineares Sondieren: Beispiel

Einfügereihenfolge 79, 28, 49, 88, 59

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49								28	79

$h_0(K_p) = h(K_p) = K_p \mod 10$

$h_i(K_p) = (K_p + i) \mod 10,\ i = 1, 2, \ldots$

Lineares Sondieren: Beispiel

Einfügereihenfolge 79, 28, 49, 88, 59

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	88							28	79

$h_0(K_p) = h(K_p) = K_p \mod 10$

$h_i(K_p) = (K_p + i) \mod 10,\ i = 1, 2, \ldots$

Lineares Sondieren: Beispiel

Einfügereihenfolge 79, 28, 49, 88, 59

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	88	59						28	79

$h_0(K_p) = h(K_p) = K_p \mod 10$

$h_i(K_p) = (K_p + i) \mod 10,\ i = 1, 2, \ldots$

Lineares Sondieren (2)

Aufwendiges Löschen

- impliziert oft Verschiebungen
- entstehende Lücken in Suchsequenzen sind aufzufüllen, da das Antreffen eines freien Platzes die Suche beendet.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	88	59						28	79

↓ Lösche 28 ↓

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	88	59						♠	79

♠ = Platzhalter

Lineares Sondieren (3)

Verbesserung: Modifikation der Überlauffolge

$$
\begin{aligned}
h_0(K_p) &= h(K_p) \\
h_i(K_p) &= (h_0(K_p) + f(i)) \mod m \qquad \text{oder} \\
h_i(K_p) &= (h_0(K_p) + f(i, h(K_p))) \mod m,\ i = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Beispiele:

- Weiterspringen um festes Inkrement c (statt nur 1): $f(i) = ci$
- Sondierung in beiden Richtungen: $f(i) = ci(-1)^i$

Quadratisches Sondieren

Bestimmung der Speicheradresse

$$\begin{aligned} h_0(K_p) &= h(K_p) \\ h_i(K_p) &= \left(h_0(K_p) + ai + bi^2\right) \mod m,\ i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

m sollte Primzahl sein.

Folgender Spezialfall ist wichtig:

$$h_i(K_p) = \left(h_0(K_p) - \lceil i/2 \rceil (-1)^i\right) \mod m,\ 1 \leq i \leq m-1$$

Beispiel: Einfügereihenfolge 79, 28, 49, 88, 59

Weitere offene Hash-Verfahren

Sondieren mit Zufallszahlen

- Mit Hilfe eines deterministischen Pseudozufallszahlen -Generators wird die Adressenfolge $[1 \ldots m-1] \mod m$ genau einmal erzeugt:
  $h_0(K_p) = h(K_p)$
  $h_i(K_p) = h_0(K_p) + z_i) \mod m,\ i = 1, 2, \ldots$

Double Hashing

- Einsatz einer zweiten Funktion für die Sondierungsfolge
  $h_0(K_p) = h(K_p)$
  $h_i(K_p) = (h0(K_p) + ih\prime(K_p)) \mod m,\ i = 1, 2, \ldots$
  Wähle h'(K) so, dass für alle Schlüssel K die Sondierungsfolge eine Permutation aller Hash-Adressen bildet

Kettung von Synonymen

- explizite Kettung aller Sätze einer Kollisionsklasse
- verringert nicht die Anzahl der Kollisionen; sie verkürzt jedoch den Suchpfad beim Aufsuchen eines Synonyms.