ADS: Algorithmen und Datenstrukturen

Teil VI

Peter F. Stadler & Konstantin Klemm

Bioinformatics Group, Dept. of Computer Science & Interdisciplinary Center for Bioinformatics, **University of Leipzig**

25. November 2009

Merge-Sort

- Anwendbar für internes und externes Sortieren
- Ansatz (Divide-and-Conquer-Strategie)
  - rekursives Zerlegen in jeweils gleich große Teilfolgen
  - Verschmelzen (Mischen) der sortierten Teilfolgen

Algorithmus (Rekursives Merge-Sort)

```
sort(A,l,r) sortiert das Feld A im Bereich l bis r
  Falls r-l=1: fertig
  Falls r-l>1
  Mitte der Liste bestimmen: int m = (l+r+1)/2
  linken Teil sortieren: sort(A,l,m-1)
  rechten Teil sortieren: sort(A,m,r)
  zusammenfügen: merge(A,l,m,r)
```

Mischen für Merge-Sort

Pro Teilliste wird Zeiger (Index) auf nächstes Element geführt.

- jeweils kleinstes Element wird in Ergebnisliste übernommen und Indexzeiger fortgeschaltet
- sobald eine Teilliste "erschöpft" ist, werden alle verbleibenden Elemente der anderen Teilliste in die Ergebnisliste übernommen
- lineare Kosten

```
merge(A,l,m,r)
  // 1. Schritt: Schleife zum Fuellen von B:
  j=l; k=m;
  for (i=0; i<r-l+1; i++)
    if (k>r or (j<m and A[j]<=A[k]))  B[i] = A[j++];
    else                              B[i] = A[k++];
  // 2. Schritt:  Rueckkopieren
  for (i=0, i< r-l+1); i++) A[l+i] = B[i];
```

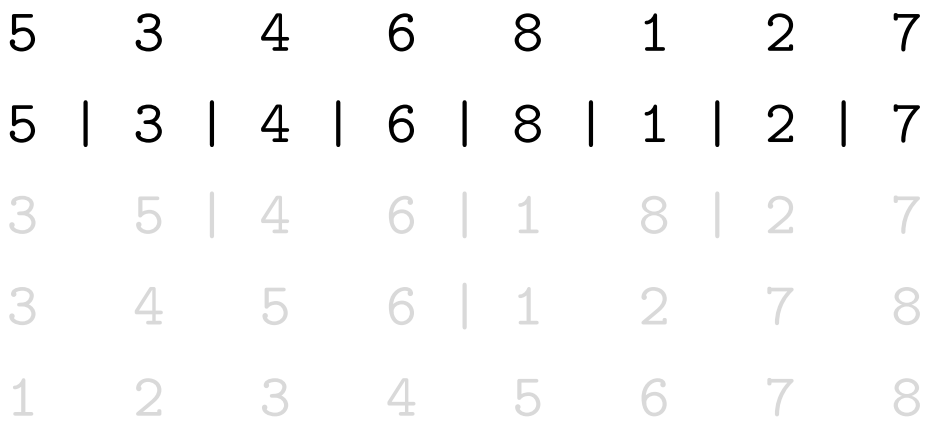
Merge-Sort, nicht-rekursiv

Algorithmus

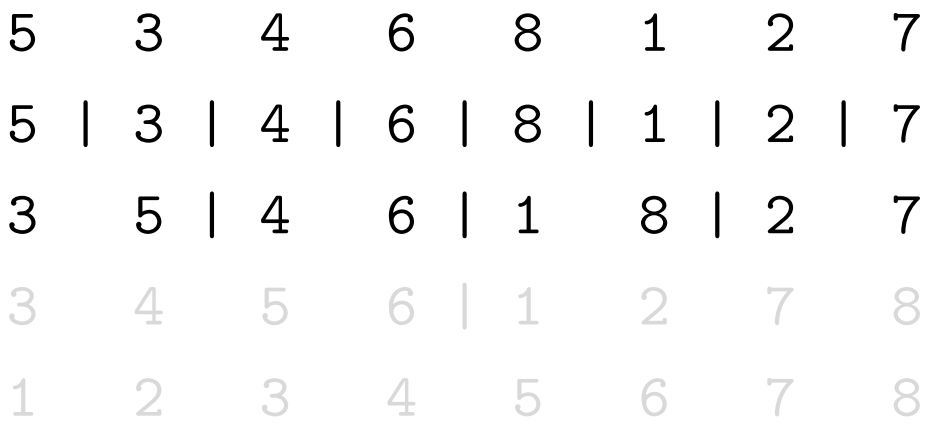
- zunächst werden benachbarte Elemente zu sortierten Teillisten der Länge 2 gemischt
- fortgesetztes Mischen benachbarter (sortierter) Teillisten
- Länge sortierter Teillisten verdoppelt sich pro Durchgang
- Sortierung ist beendet, sobald in einem Durchgang nur noch zwei Teillisten verschmolzen werden.

Beispiel: Merge-Sort

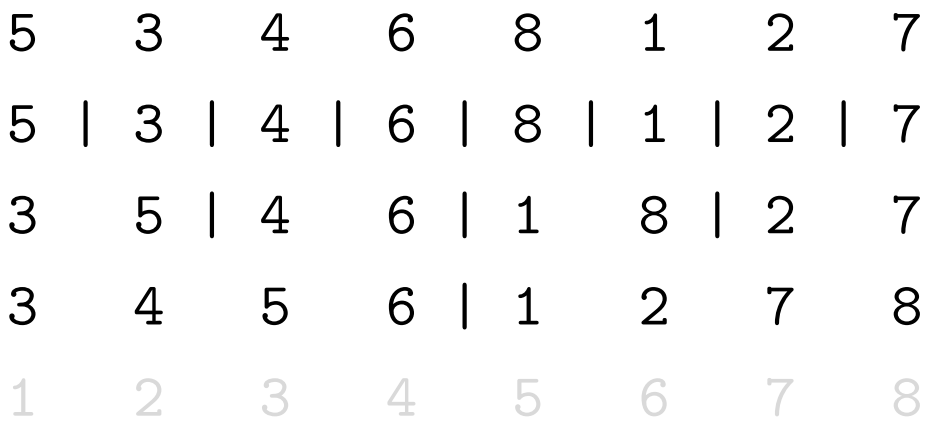
Beispiel: Merge-Sort



Beispiel: Merge-Sort



Beispiel: Merge-Sort



Beispiel: Merge-Sort

```
5   3   4   6   8   1   2   7
5 | 3 | 4 | 6 | 8 | 1 | 2 | 7
3   5 | 4   6 | 1   8 | 2   7
3   4   5   6 | 1   2   7   8
1   2   3   4   5   6   7   8
```

Natürliches Merge-Sort

Algorithmus

- statt mit 1-elementigen Teillisten zu beginnen, werden bereits anfangs möglichst lange sortierte Teilfolgen ("runs") verwendet
- Nutzung einer bereits vorliegenden (natürlichen) Sortierung in der Eingabefolge

Beispiel: Natürliches Merge-Sort

5 3 4 6 8 1 2 7

5 | 3 4 6 8 | 1 2 7

3 4 5 6 8 | 1 2 7

1 2 3 4 5 6 7 8

Beispiel: Natürliches Merge-Sort

5 3 4 6 8 1 2 7

5 | 3 4 6 8 | 1 2 7

3 4 5 6 8 | 1 2 7

1 2 3 4 5 6 7 8

Beispiel: Natürliches Merge-Sort

5 3 4 6 8 1 2 7

5 | 3 4 6 8 | 1 2 7

3 4 5 6 8 | 1 2 7

1 2 3 4 5 6 7 8

Beispiel: Natürliches Merge-Sort

```
5   3   4   6   8   1   2   7
5 | 3   4   6   8 | 1   2   7
3   4   5   6   8 | 1   2   7
1   2   3   4   5   6   7   8
```

Zusammenfassung: Sortieren

- Kosten allgemeiner Sortierverfahren wenigstens $O(n \log n)$
- Elementare Sortierverfahren: Kosten $O(n^2)$
  - einfache Implementierung; ausreichend bei kleinem n
  - gute Lösung: Insertion Sort
- $O(n \log n)$-Verfahren: Heap-Sort, Quick-Sort, Merge-Sort
  - Heap-Sort und Merge-Sort sind worst-case-optimal, $O(n \log n)$
  - in Messungen erzielte Quick-Sort in den meisten Fällen die besten Ergebnisse
- Begrenzung der Kosten für Umkopieren durch indirekte Sortierverfahren
- Generall vorteilhafte Eigenschaften von Sortierverfahren
  - Ausnutzen einer weitgehenden Vorsortierung
  - Stabilität

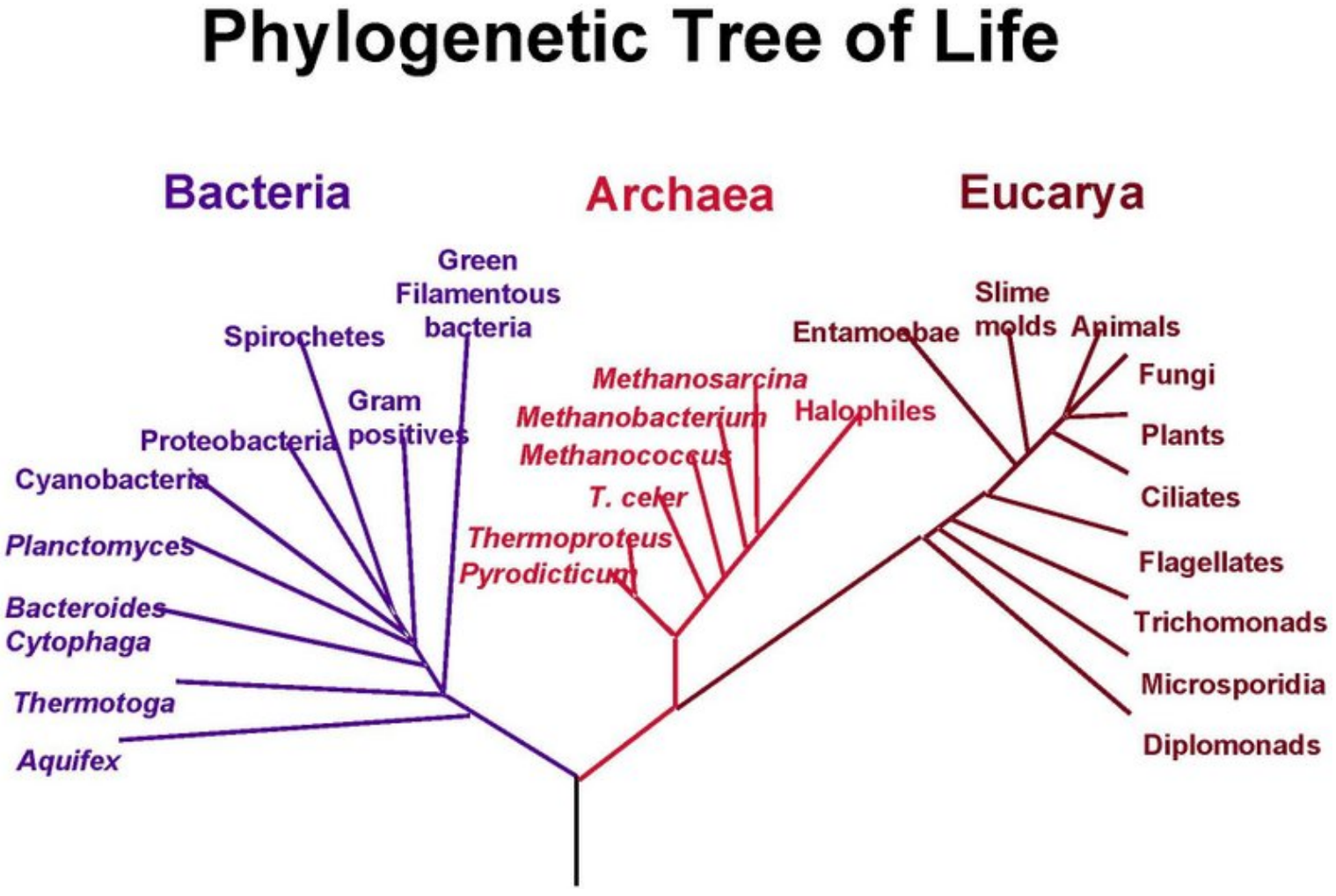
Bäume

- Ein *Graph* ist ein Paar (V, E). Hierbei ist V eine Menge (=Knotenmenge) und E eine Menge von ungeordneten Paaren (=Kanten) in V.
- Ein *Wald* ist ein Graph ohne Zyklen.
- Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Wald.

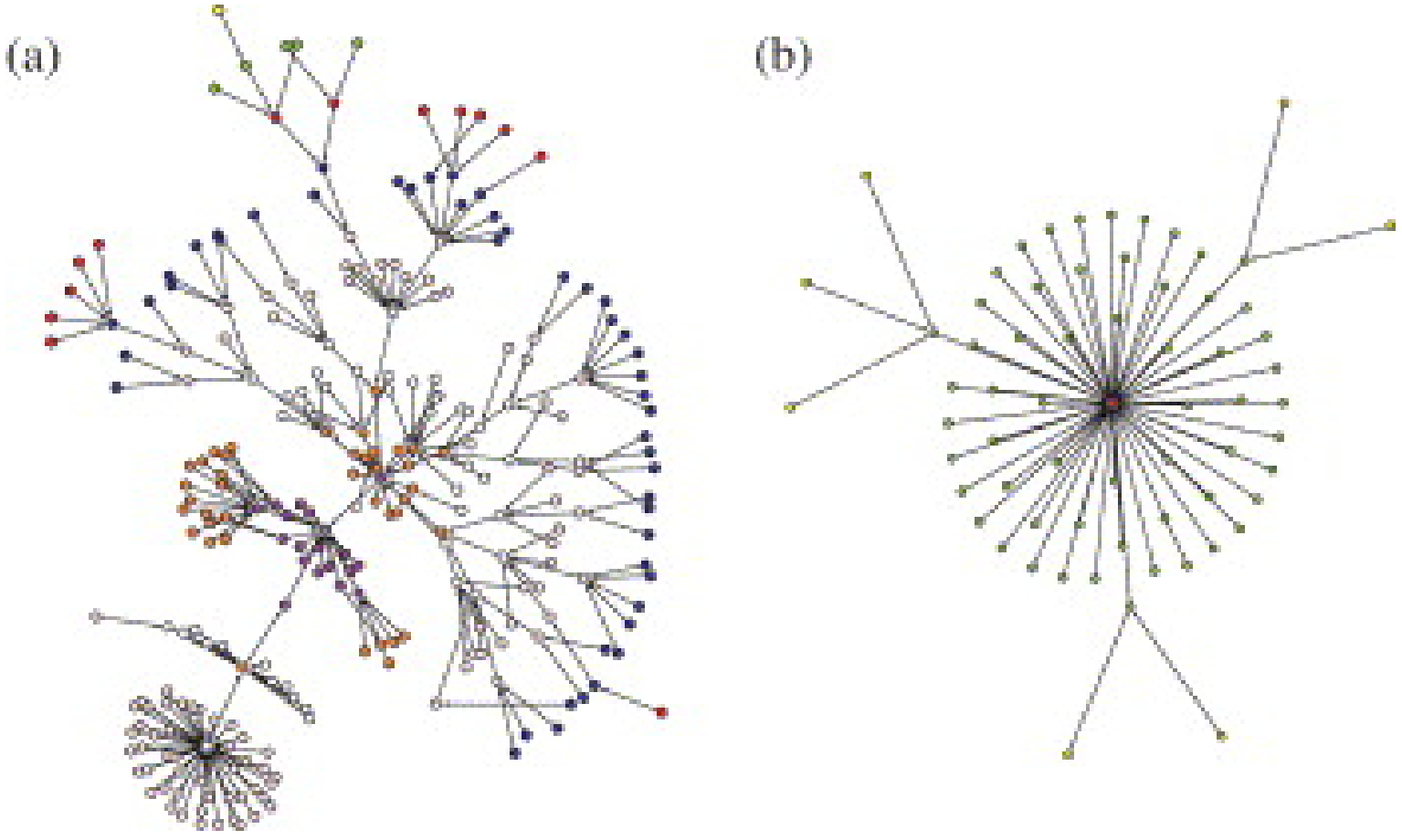
hier noch nicht definiert, aber intuitiv klar: Zyklus, Zusammenhang.

Beispiele $\rightarrow$ Tafel.

Beispiel 1: Phylogenetischer Baum



Beispiel 2: Verzeichnisbäume



Klemm et al., *Analysis of attachment models for directory and file trees*, Physica D (2006)

Orientierte Bäume

Eine Menge B ist ein orientierter (Wurzel-) Baum, falls

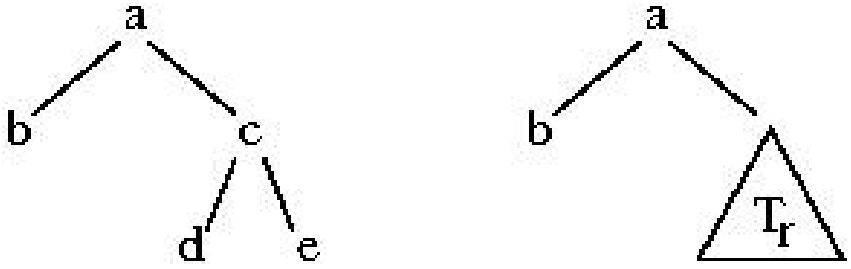
1. in B ein ausgezeichnetes Element w – die Wurzel von B – existiert
2. die Elemente in $B \setminus \{w\}$ disjunkt zerlegt werden können in $B_1, B_2, \ldots, B_m$, wobei jedes B_i ebenfalls ein orientierter Baum ist.

Anschaulich:

- Die Kanten des Graphen sind gerichtet.
- Von der Wurzel gehen nur Kanten aus, keine treffen ein.
- Jeder Knoten ist von der Wurzel aus auf genau einem Weg entlang der gerichteten Kanten erreichbar.
- Für jeden Nicht-Wurzelknoten gibt es Knoten, die nicht entlang der gerichteten Kanten erreichbar sind.

Darstellungsarten für orientierte Bäume

1. Graphendarstellung



2. Mengendarstellung
   $\{\{a, b, c, d, e\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \{d\}, \{e\}\}$
3. Klammerdarstellung
   $(a, (b), (c, (d), (e)))$
4. Rekursives Einrücken

a

$\quad b$

$\quad c$

$\quad\quad d$

$\quad\quad e$

Binärbäume

Ein Binärbaum ist eine endliche Menge von Elementen, die entweder leer ist oder ein ausgezeichnetes Element - die Wurzel des Baumes - besitzt und folgende Eigenschaften aufweist:

- Die verbleibenden Elemente sind in zwei disjunkte Untermengen zerlegt.
- Jede Untermenge ist selbst wieder ein Binärbaum und heißt linker bzw. rechter Unterbaum des ursprünglichen Baumes

Formale ADT-Spezifikation: BINTREE

Datentyp BINTREE, Basistyp ELEM

Operationen:

CREATE:		$\rightarrow$ BINTREE
EMPTY:	BINTREE	$\rightarrow \{\text{TRUE, FALSE}\}$
BUILD:	BINTREE$\times$ELEM$\times$BINTREE	$\rightarrow$ BINTREE
LEFT:	BINTREE$\setminus\{b_0\}$	$\rightarrow$ BINTREE
ROOT:	BINTREE$\setminus\{b_0\}$	$\rightarrow$ ELEM
RIGHT:	BINTREE$\setminus\{b_0\}$	$\rightarrow$ BINTREE

Axiome

1. CREATE() $= b0$;
2. EMPTY (CREATE) $=$ TRUE;
3. $\forall l, r \in$ BINTREE, $\forall d \in$ ELEM:

   EMPTY (BUILD (l, d, r)) $=$ FALSE
   LEFT (BUILD (l, d, r)) $=$ l;
   ROOT (BUILD (l, d, r)) $=$ d;
   RIGHT(BUILD (l, d, r)) $=$ r;

Beispiele für Konstruktion

Welche Binärbäume entstehen durch

- BUILD (BUILD (0, b, BUILD (0, d, 0)), a, BUILD (0, c, 0))
- BUILD (BUILD (BUILD (0, d, 0), b, 0), a, BUILD (0, c, 0))

?

Eigenschaften von Binärbäumen I

Satz: Die maximale Anzahl von Knoten eines Binärbaumes

1. auf Stufe i ist 2^i, $i \geq 0$
2. der Höhe h ist 2^h-1, $h \geq 0$ (Der leere Baum hat Höhe 0)

Definition: Ein *vollständiger* Binärbaum der Stufe k hat folgende Eigenschaften:

- Jeder Knoten der Stufe k ist ein Blatt.
- Jeder Knoten auf einer Stufe $< k$ hat nicht-leere linke und rechte Unterbäume.

Definition: In einem *strikten* Binärbaum besitzt jeder innere Knoten nicht-leere linke und rechte Unterbäume

Eigenschaften von Binärbäumen II

Definition: Ein *ausgeglichener* Binärbaum ist ein Binärbaum, so daß gilt:

1. Jedes Blatt im Baum ist auf Stufe k oder $k+1$, $(k \geq 0)$.
2. Jeder Knoten auf Stufe $< k$ hat nicht-leere linke und rechte Teilbäume

Definition: Ein *fast vollständiger* Binärbaum ist ein ausgeglichener Binärbaum, bei dem zusätzlich gilt:

> Falls ein innerer Knoten einen rechten Nachfolger auf Stufe $k+1$ besitzt, dann ist sein linker Teilbaum vollständig mit Blättern auf Stufe $k+1$.