Algorithmen und Datenstrukturen 1

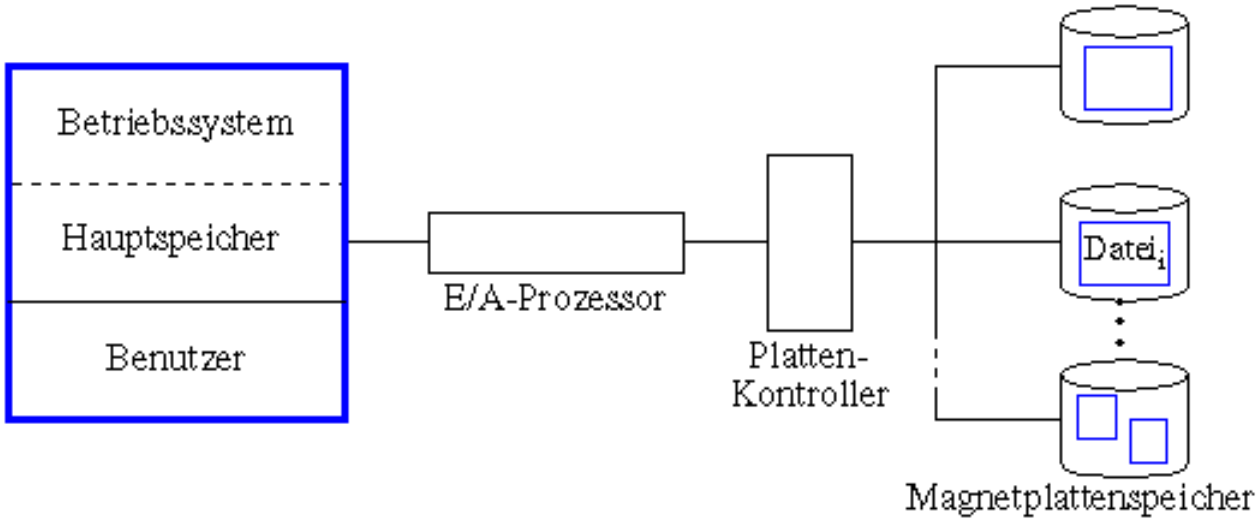
10. Vorlesung

Martin Middendorf / Peter F. Stadler

Universität Leipzig
Institut für Informatik
middendorf@informatik.uni-leipzig.de
studla@bioinf.uni-leipzig.de

Suchverfahren für große Datenmengen

- bisher betrachtete Datenstrukturen (Arrays, Listen, Binärbäume) und Algorithmen waren auf im Hauptspeicher vorliegende Daten ausgerichtet
- effiziente Suchverfahren für große Datenmengen auf Externspeicher erforderlich (persistente Speicherung)
  - große Datenmengen können nicht vollständig in Hauptspeicher-Datenstrukturen abgebildet werden
  - Zugriffsgranulat sind Seiten bzw. Blöcke von Magnetplatten: z.B. 4-16 KB
  - Zugriffskosten 5 Größenordnungen langsamer als für Hauptspeicher (5 ms vs. 50 ns)



Sequentieller Dateizugriff

Sequentielle Dateiorganisation

- Datei besteht aus Folge gleichartiger Datensätze
- Datensätze sind auf Seiten/Blöcken gespeichert
- ggf. bestimmte Sortierreihenfolge (bzgl. eines Schlüssels) bei der Speicherung der Sätze (sortiert-sequenzielle Speicherung)

Sequenzieller Zugriff

- Lesen aller Seiten / Sätze vom Beginn der Datei an
- sehr hohe Zugriffskosten, v.a. wenn nur ein Satz benötigt wird

Optimierungsmöglichkeiten

- "dichtes Packen" der Sätze innerhalb der Seiten (hohe Belegungsdichte)
- Clusterung zwischen Seiten, d.h. "dichtes Packen" der Seiten einer Datei auf physisch benachbarte Plattenbereiche, um geringe Zugriffszeiten zu ermöglichen

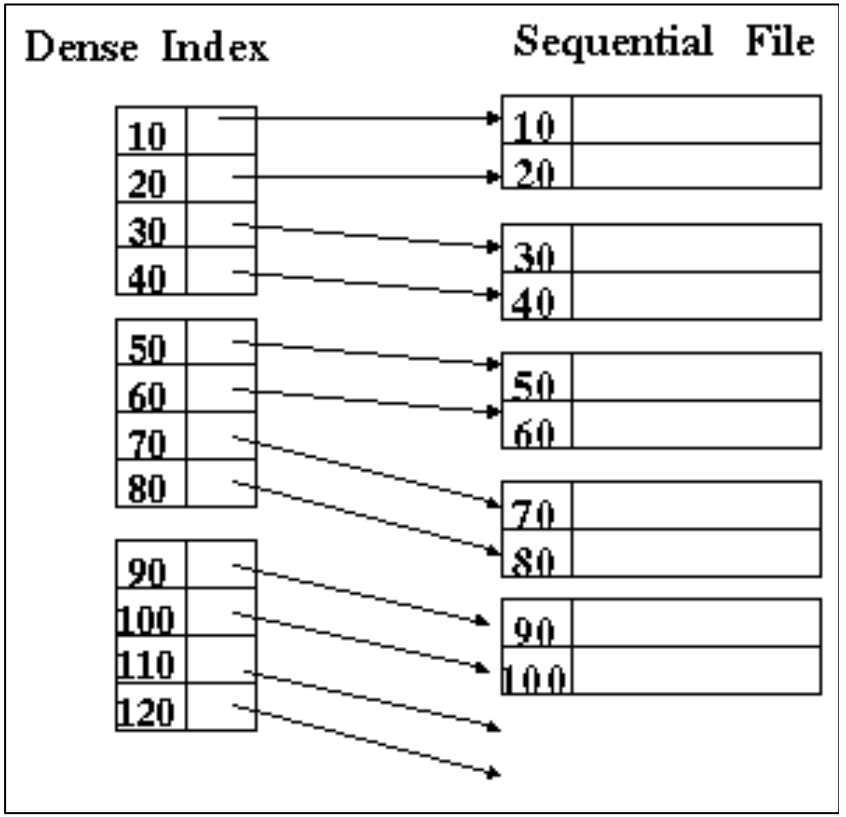
Schneller Zugriff auf einzelne Datensätze erfordert Einsatz von zusätzlichen *Indexstrukturen*, z.B. Mehrwegbäume

Alternative: gestreute Speicherung der Sätze (-> Hashing)

Dichtbesetzter vs. dünnbesetzter Index I

Dichtbesetzter Index (dense index)

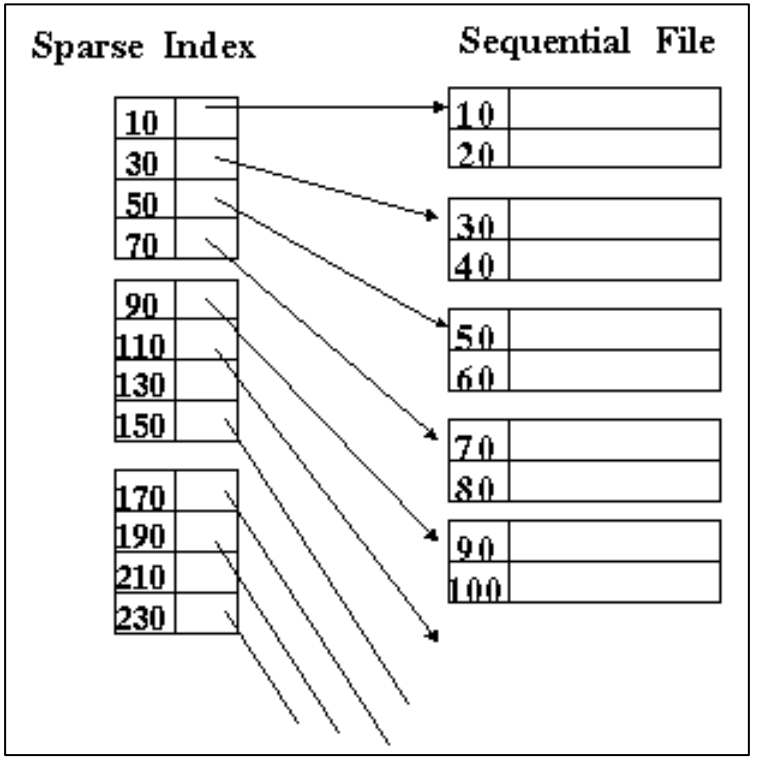
- für jeden Datensatz existiert ein Eintrag in Indexdatei
- höherer Indexaufwand als bei dünnbesetztem Index
- breiter anwendbar, u.a. auch bei unsortierter Speicherung der Sätze
- einige Auswertungen auf Index möglich, ohne Zugriff auf Datensätze (Existenztest, Häufigkeitsanfragen, Min/Max-Bestimmung)



Anwendungsbeispiel

- 1 Million Sätze, B=20, 200 Indexeinträge pro Seite
- Dateigröße:
- Indexgröße:
- mittlere Zugriffskosten:

Dichtbesetzter vs. dünnbesetzter Index II



Dünnbesetzter Index (sparse index)

- nicht für jeden Schlüsselwert ex. Eintrag im Index
- sinnvoll v.a. bei Clusterung gemäß Sortierreihenfolge des Indexattributes: ein Indexeintrag pro Datenseite

indexsequentielle Datei (ISAM): sortiertesequentielle Datei mit dünnbesetztem Index für Sortierschlüssel

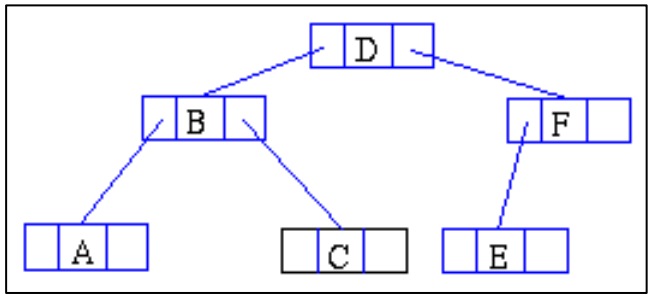
Anwendungsbeispiel

- 1 Million Sätze, B=20, 2 Indexeinträge pro Seite
- Dateigröße:
- Indexgröße:
- mittlere Zugriffskosten:

Mehrstufiger Index

- Indexdatei entspricht sortiert sequentieller Datei -> kann selbst wieder indexiert werden
- auf höheren Stufen kommt nur dünnbesetzte Indexierung in Betracht
- beste Umsetzung im Rahmen von Mehrwegbäumen (B-/B*-Bäume)

Mehrwegbäume

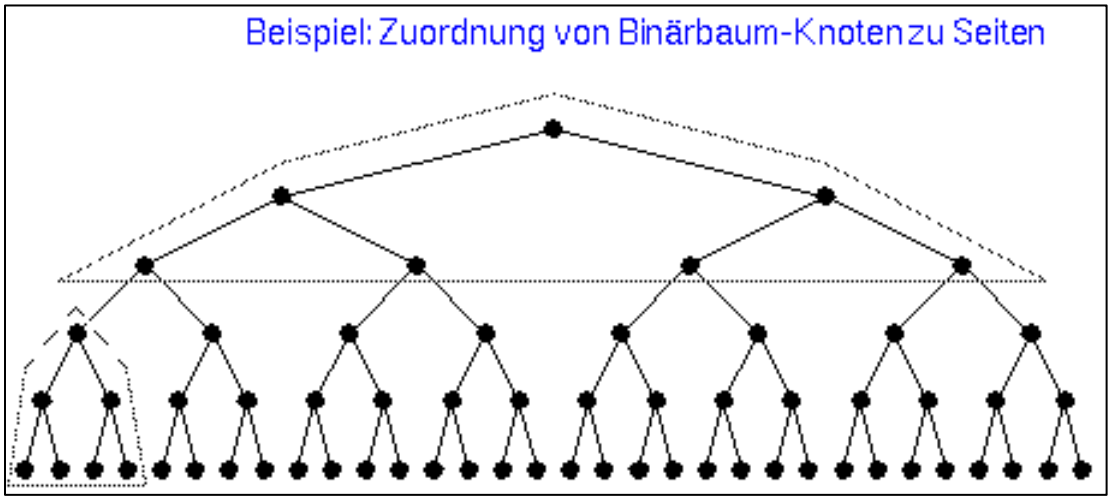


Ausgangspunkt: Binäre Suchbäume (balanciert)

- entwickelt für Hauptspeicher
- ungeeignet für große Datenmengen

Externspeicherzugriffe erfolgen auf Seiten

- Abbildung von Schlüssel-werten/Sätzen auf Seiten
- Index-Datenstruktur für schnelle Suche



Alternativen:

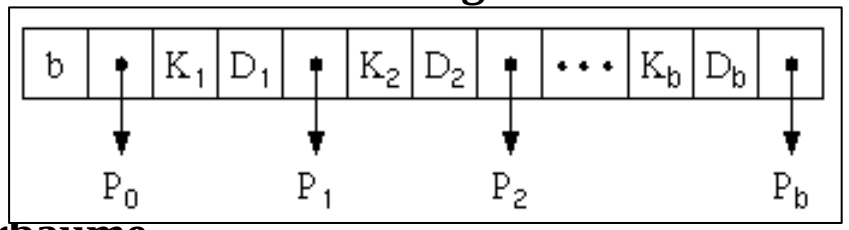
- m-Wege-Suchbäume
- B-Bäume
- B*-Bäume

Grundoperationen: Suchen, Einfügen, Löschen

Kostenanalyse im Hinblick auf Externspeicherzugriffe

m-Wege-Suchbäume I

Def.: Ein <u>m-Wege-Suchbaum</u> oder ein <u>m-ärer Suchbaum</u> B ist ein Baum, in dem alle Knoten einen Grad ≤ m besitzen. Entweder ist B leer oder er hat folgende Eigenschaften:



(1) Jeder Knoten des Baums mit b Einträgen, b ≤ m-1, hat folgende Struktur:

Die P_i, $0 \le i \le b$, sind Zeiger auf die Unterbäume des Knotens und die K_i und D_i, $1 \le i \le b$ sind Schlüsselwerte und Daten.

(2) Die Schlüsselwerte im Knoten sind aufsteigend geordnet: $K_i \le K_{i+1}$, $1 \le i < b$.

(3) Alle Schlüsselwerte im Unterbaum von P_i sind kleiner als der Schlüsselwert K_{i+1}, $0 \le i < b$.

(4) Alle Schlüsselwerte im Unterbaum von P_b sind größer als der Schlüsselwert K_b .

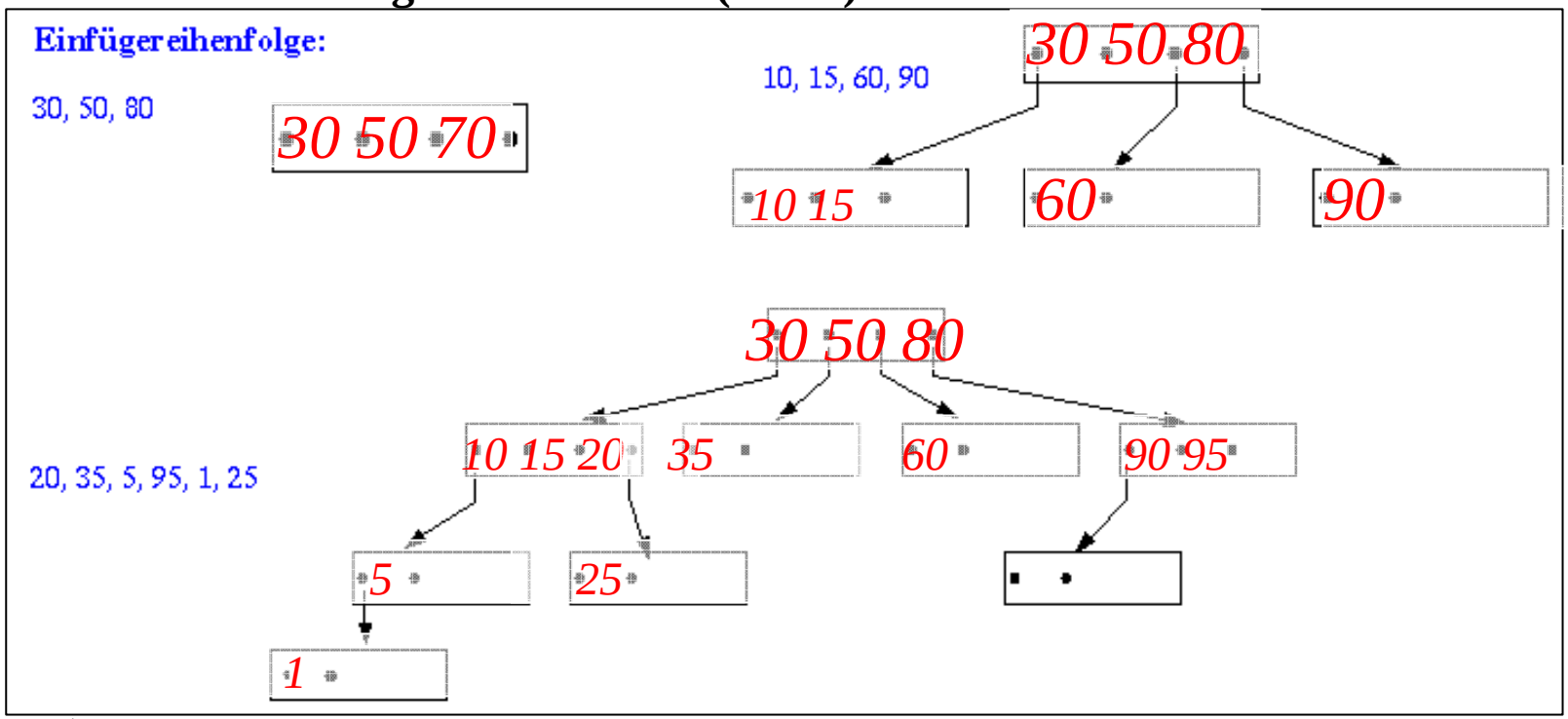
(5) Die Unterbäume von P_i, $0 \le i \le b$ sind auch m-Wege-Suchbäume.

Die D_i können Daten oder Zeiger auf die Daten repräsentieren

- direkter Index: eingebettete Daten (weniger Einträge pro Knoten; kleineres m)
- indirekter Index: nur Verweise; erfordert separaten Zugriff auf Daten zu dem Schlüssel

m-Wege-Suchbäume II

Beispiel: Aufbau eines m-Wege-Suchbaumes (m = 4)



Beobachtungen

- Die Schlüssel in den inneren Knoten besitzen zwei Funktionen. Sie identifizieren Daten(sätze) und sie dienen als Wegweiser in der Baumstruktur
- Der m-Wege-Suchbaum ist im allgemeinen nicht ausgeglichen

m-Wege-Suchbäume III

Wichtige Eigenschaften für alle Mehrwegbäume:

$S(P_i)$ sei die Seite, auf die P_i zeigt, und $K(P_i)$ sei die Menge aller Schlüssel, die im Unterbaum mit Wurzel $S(P_i)$ gespeichert werden können. Dann gelten folgende Ungleichungen:

(1) $x \in K(P_O)$: $x < K_1$

(2) $x \in K(P_i)$: $K_i < x < K_{i+1}$ für i = 1, 2, ..., b-1

(3) $x \in K(P_b)$: $K_b < x$

Kostenanalyse

- Die Anzahl der Knoten N in einem vollständigen Baum der Höhe h, $h \geq 1$, ist

$$N = \sum_{i=0}^{h-1} m^i = \frac{m^h - 1}{m - 1}$$

- Im ungünstigsten Fall ist der Baum völlig entartet: n = N = h
- Schranken für die Höhe eines m-Wege-Suchbaums: $\log_m(n+1) \leq h \leq n$

Mehrwegbäume I

Ziel: Aufbau sehr breiter Bäume von geringer Höhe

- in Bezug auf Knotenstruktur vollständig ausgeglichen
- effiziente Grundoperationen auf Seiten (= Transporteinheit zum Externspeicher)
- Zugriffsverhalten weitgehend unabhängig von Anzahl der Sätze
- Einsatz als Zugriffs-/Indexstruktur für 10 als auch für 10^{10} Sätze

Grundoperationen:

- direkter Schlüsselzugriff auf einen Satz
- sortiert sequentieller Zugriff auf alle Sätze
- Einfügen eines Satzes; Löschen eines Satzes

Mehrwegbäume II

Varianten

- ISAM-Dateistruktur (1965; statisch, periodische Reorganisation)
- Weiterentwicklungen: B- und B*-Baum
- B-Baum: 1970 von R. Bayer und E. McCreight entwickelt
  dynamische Reorganisation durch Splitten und Mischen von Seiten

Breites Spektrum von Anwendungen ("The Ubiquitous B-Tree")

- Dateiorganisation ("logische Zugriffsmethode", VSAM)
- Datenbanksysteme (Varianten des B*-Baumes sind in allen DBS zu finden!)
- Text- und Dokumentenorganisation ...

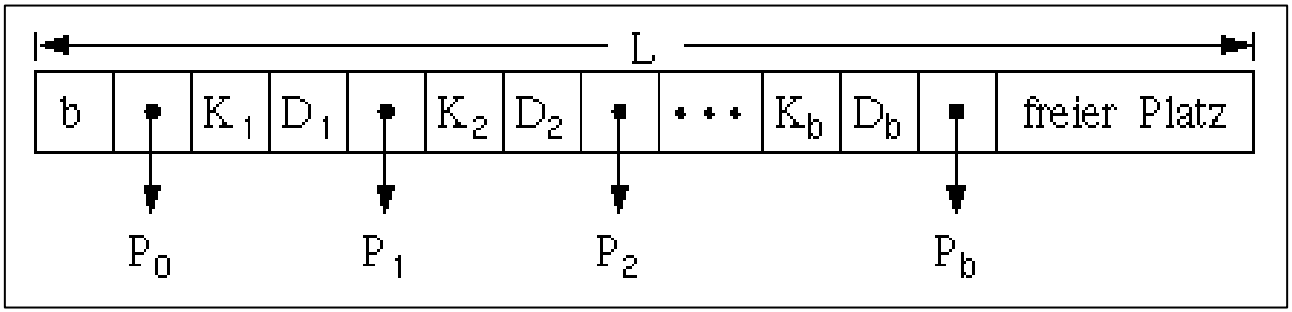
B-Bäume I

Def.: Seien k, h ganze Zahlen, $h \geq 0$, $k > 0$.

Ein B-Baum B der Klasse $\tau(k,h)$ ist entweder ein leerer Baum oder ein geordneter Baum mit folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Pfad von der Wurzel zu einem Blatt hat die gleiche Länge h-1.
2. Jeder Knoten außer der Wurzel und den Blättern hat mindestens k+1 Söhne. Die Wurzel ist ein Blatt oder hat mindestens 2 Söhne
3. Jeder Knoten hat höchstens 2k+1 Söhne
4. Jedes Blatt mit der Ausnahme der Wurzel als Blatt hat mindestens k und höchstens 2k Einträge.

Für einen B-Baum ergibt sich folgendes Knotenformat:



B-Bäume II

Einträge

- Die Einträge für Schlüssel, Daten und Zeiger haben die festen Längen l_b, l_K, l_D und l_p.
- Die Knoten- oder Seitengröße sei L.
- Maximale Anzahl von Einträgen pro Knoten: $b_{max} = \left\lfloor \frac{L - l_b - l_p}{l_K + l_D + l_p} \right\rfloor = 2k$

Reformulierung der Definition

(4) und (3). Eine Seite darf höchstens voll sein.

(4) und (2). Jede Seite (außer der Wurzel) muss mindestens halb voll sein.
Die Wurzel enthält mindestens einen Schlüssel.

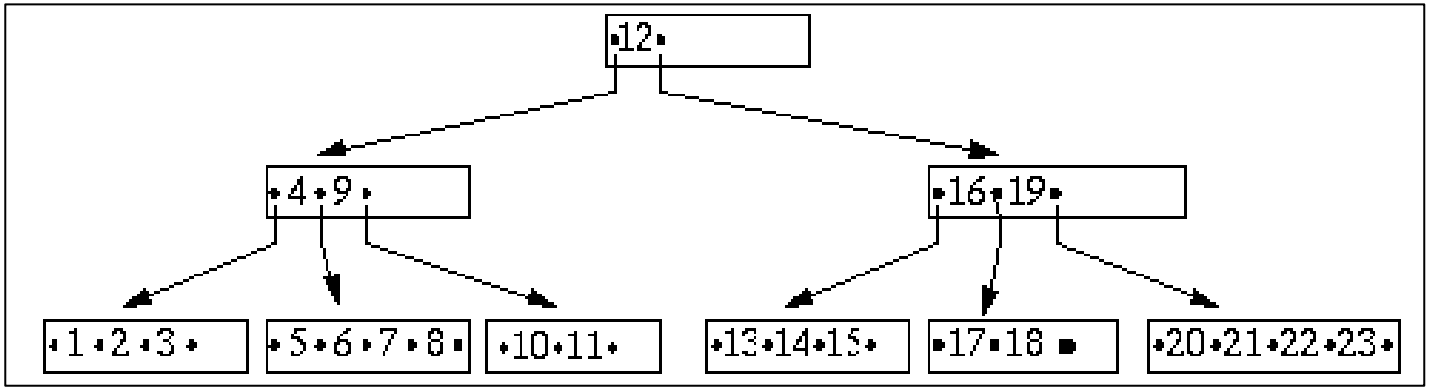
(1) Der Baum ist, was die Knotenstruktur angeht, vollständig ausgeglichen

Balancierte Struktur:

- unabhängig von Schlüsselmenge
- unabhängig ihrer Einfügereihenfolge

B-Bäume III

Beispiel: B-Baum der Klasse $\tau(2,3)$



- In jedem Knoten stehen die Schlüssel in aufsteigender Ordnung mit $K_1 < K_2 < \ldots < K_b$
- Jeder Schlüssel hat eine Doppelrolle als Identifikator eines Datensatzes und als Wegweiser im Baum
- Die Klassen $\tau(k,h)$ sind nicht alle disjunkt. Beispielsweise ist ein maximaler Baum aus $\tau(2,3)$ ebenso in $\tau(3,3)$ und $\tau(4,3)$.

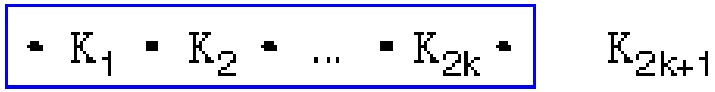
Höhe h: Bei einem Baum der Klasse $\tau(k,h)$ mit n Schlüsseln gilt für seine Höhe:

$$\log_{2k+1}(n+1) \leq h \leq \log_{k+1}((n+1)/2)+1 \quad \text{für } n \geq 1$$

$$\text{und } h = 0 \quad \text{für } n = 0$$

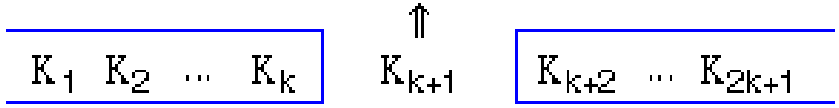
Einfügen in B-Bäumen I

Was passiert, wenn Wurzel überläuft ?



Fundamentale Operation: Split-Vorgang

1. Anforderung einer neuen Seite und
2. Aufteilung der Schlüsselmenge nach folgendem Prinzip

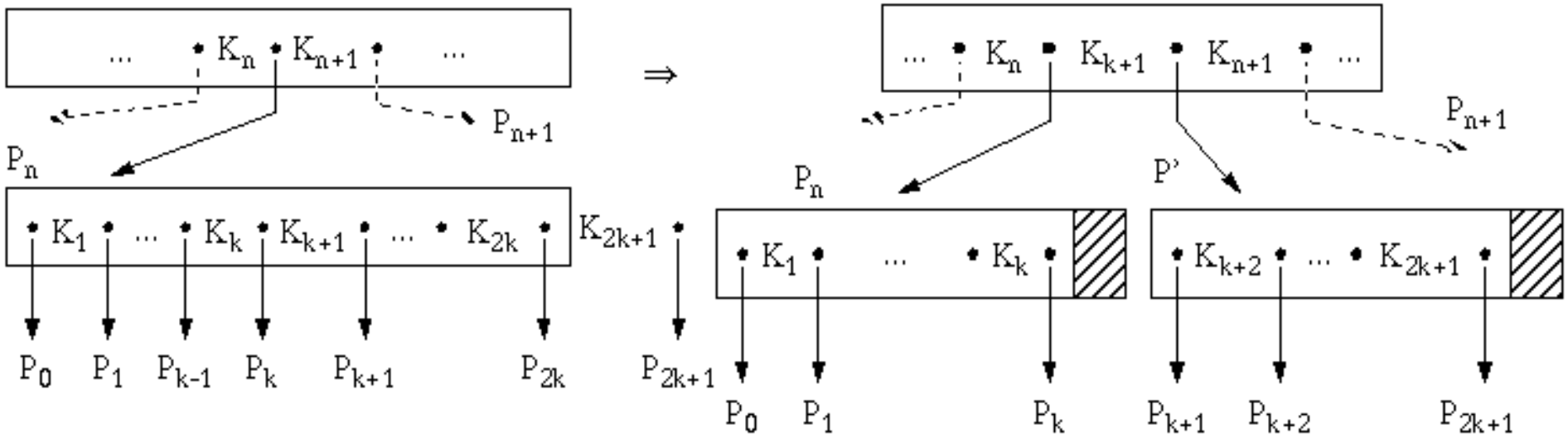


- mittlere Schlüssel (Median) wird zum Vaterknoten gereicht
- Ggf. muß Vaterknoten angelegt werden (Anforderung einer neuen Seite).

- Blattüberlauf erzwingt Split-Vorgang, was Einfügung in den Vaterknoten impliziert
- Wenn dieser überläuft, folgt erneuter Split-Vorgang
- Split-Vorgang der Wurzel führt zu neuer Wurzel: Höhe des Baumes erhöht sich um 1

Einfügen in B-Bäumen II

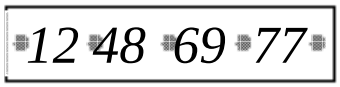
- **Bei B-Bäumen ist Wachstum von den Blättern zur Wurzel hin gerichtet**
- **Einfügealgorithmus (ggf. rekursiv)**
  - Suche Einfügeposition: Wenn Platz vorhanden ist, speichere Element, sonst schaffe Platz durch Split-Vorgang und füge ein
- **Split-Vorgang als allgemeines Wartungsprinzip**



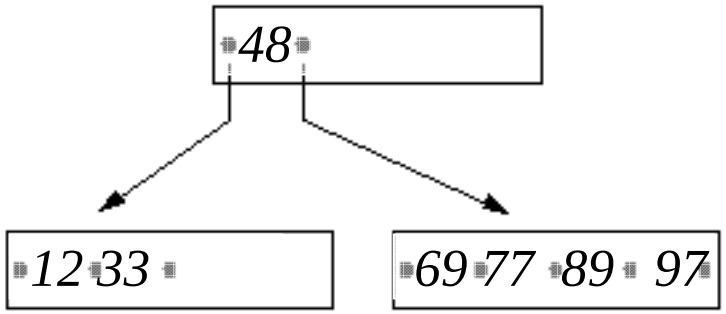
Beispiel: Aufbau eines B-Baumes der Klasse τ(2,h) I

Einfügereihenfolge:

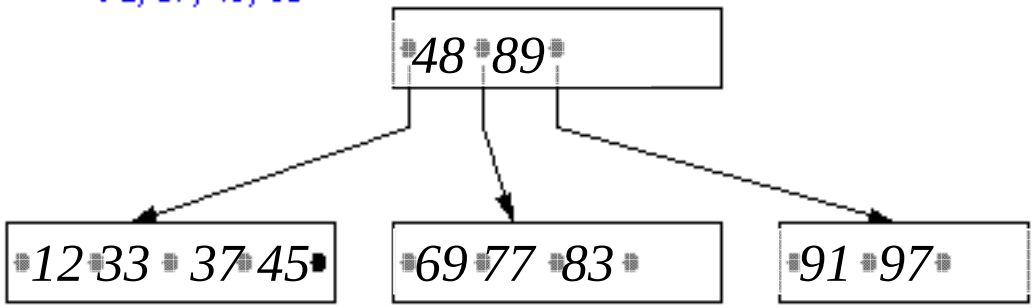
77, 12, 48, 69



33, 89, 97



91, 37, 45, 83



2, 5, 57, 90, 95