

Algorithmen und Datenstrukturen 1

8. Vorlesung

Martin Middendorf und Peter F. Stadler

Universität Leipzig
Institut für Informatik

middendorf@informatik.uni-leipzig.de
studla@bioinf.uni-leipzig.de

Gefädelte Binärbäume I

Ziel: Weitere Verbesserung von iterativen Durchlaufalgorithmen

Problem: Es gibt in vielen Fällen keinen Zeiger auf den Nachfolger oder Vorgänger einer Traversierung im Baum

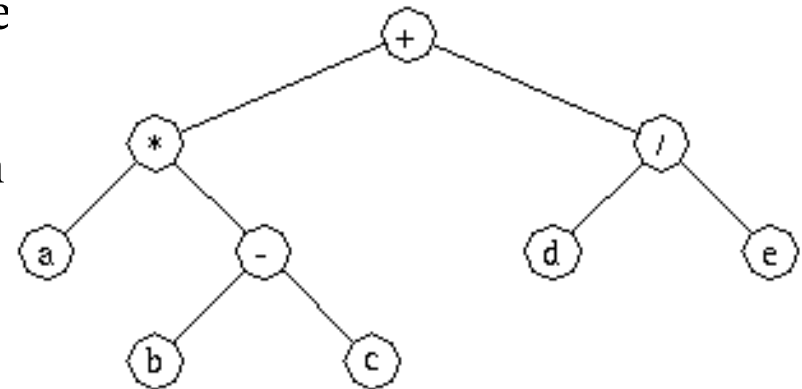
Methode benutzt einen "**Faden**", der die Baumknoten in der Folge der Durchlaufordnung verknüpft.

Zwei Typen von Fäden:

- **Rechtsfaden** verbindet jeden Knoten mit seinem Nachfolgerknoten in Durchlaufordnung
- **Linksfaden** stellt Verbindung zum Vorgänger

Lösung 1: Explizite Speicherung von 2 Fäden

Beispiel: Zwischenordnung



Gefädelte Binärbäume II

Lösung 2: Vermeidung von Redundanz

Eine zweite Art der Fädung kommt ohne zusätzliche Zeiger aus und erfordert daher geringeren Speicherplatzaufwand. Die Wartungs- und Durchlauf-Algorithmen werden lediglich geringfügig komplexer.

Beobachtung 1: Binärbaum mit n Knoten hat $n+1$ freie Zeiger (null)

Beobachtung 2: für die Zwischenordnung können Fadenzeiger in inneren Knoten durch Folgen von Baumzeigern ersetzt werden

Idee: Benutze freie Zeiger und Baumzeiger für Fädung

- pro Knoten zusätzliche Variablen Lfaden, Rfaden statt Lchild, Rchild
- zeigen auf linken bzw. rechten Nachbarn in Durchlaufreihenfolge.
- Achtung: Normale Baumzeiger müssen von Fädelzeigern unterschieden werden.

Gefädelte Binärbäume III

Algorithmus für die Traversierung

Start bei Wurzelknoten

Schleife bis der Knoten rechts außen erreicht ist:

 Solange wie möglich nach links verzweigen

 Knoten ausgeben

 Falls Knoten Rfaden hat:

 Rfaden einen Schritt folgen

 Knoten ausgeben

 Sonst falls Knoten rechten Sohn hat:

 einen Schritt nach rechts verzweigen

Zusammenfassung

Definitionen

- Baum, orientierter Baum (Wurzel-Baum), geordneter Baum, Binärbaum
- vollständiger, fast vollständiger, strikter, ausgeglichener, ähnlicher, äquivalenter Binärbaum
- Höhe, Grad, Stufe / Pfadlänge, Gewicht

Speicherung von Binärbäumen

- verkettete Speicherung
- Feldbaum-Realisierung
- sequentielle Speicherung

Baum-Traversierung

- Preorder (WLR): Vorordnung
- Inorder (LWR): Zwischenordnung
- Postorder (LRW): Nachordnung

Gefädelt Binärbäume: Unterstützung der (iterativen) Baum-Traversierung durch Links/Rechts-Zeiger auf Vorgänger/Nachfolger in Traversierungsreihenfolge

6. Binäre Suchbäume

Natürliche binäre Suchbäume

- Begriffe und Definitionen
- Grundoperationen: Einfügen, sequentielle Suche, direkte Suche, Löschen
- Bestimmung der mittleren Zugriffskosten

Balancierte Binärbäume

AVL-Baum

- Einfügen mit Rotationstypen
- Löschen mit Rotationstypen
- Höhe von AVL-Bäumen

Gewichtsbalancierte Binärbäume

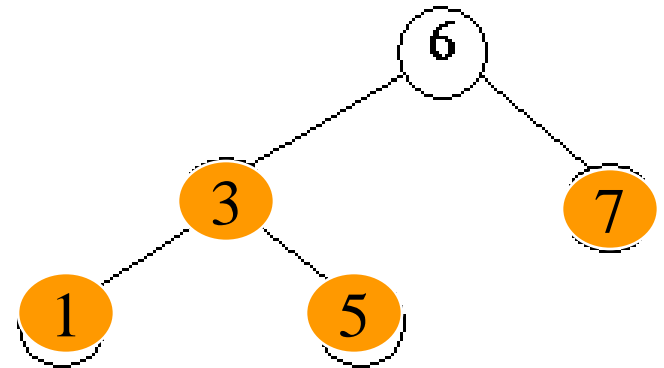
Positionssuche mit balancierten Bäumen (Lösung des Auswahlproblems)

Binäre Suchbäume

Def.: Ein natürlicher binärer Suchbaum B ist ein Binärbaum; Er ist entweder leer oder jeder Knoten in B enthält einen Schlüssel und:

- (1) alle Schlüssel im linken Unterbaum von B sind kleiner als der Schlüssel in der Wurzel von B
- (2) alle Schlüssel im rechten Unterbaum von B sind größer als der Schlüssel in der Wurzel von B
- (3) die linken und rechten Unterbäume von B sind auch binäre Suchbäume.

Beispiel: Binärbaum aus 1, 3, 5, 6, 7



4 Grundoperationen

- Einfügen
- direkte Suche
- sequentielles Durchlaufen
- Löschen

Suche in Binärbäumen

Direkte Suche:

Die Suche nach einem Schlüssel x in einem Baum (Teilbaum) läuft nach folgendem rekursiven Schema ab:

- Man inspiziere den Wurzelknoten des Baumes.
- Falls $x =$ Schlüssel des inspizierten Knotens: Suche beendet. Sonst:
- Falls $x <$ Schlüssel des inspizierten Knotens: Setze Suche im linken Teilbaum fort.
- Falls $x >$ Schlüssel des inspizierten Knotens: Setze Suche im rechten Teilbaum fort.

Maximale Anzahl inspizierter Knoten: **Tiefe des Baumes.**

Sequentielle Suche:

- Einsatz eines Durchlauf-Algorithmus (Zwischenordnung)

Einfügen in binären Suchbäumen

Neue Knoten werden immer als

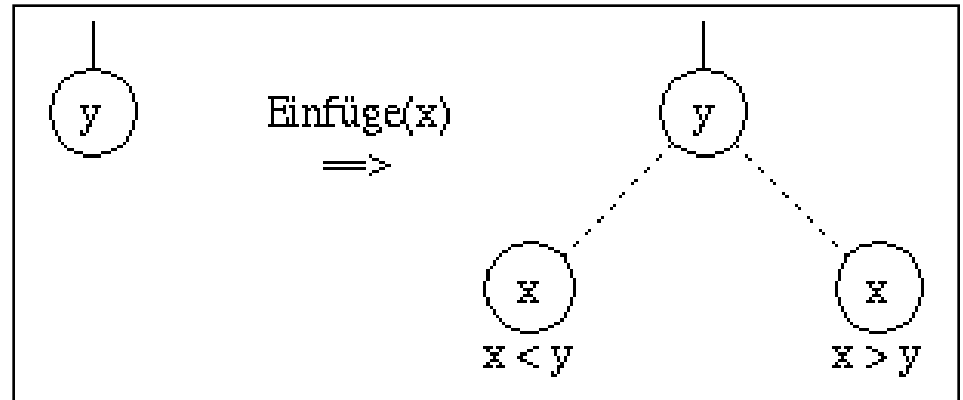
Blätter eingefügt

Suche der Einfügeposition:

Aussehen des Baumes wird durch die

Folge der Einfügungen bestimmt:

reihenfolgeabhängige Struktur

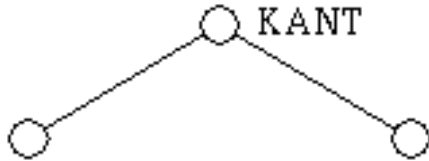


n Schlüssel erlauben $n!$ verschiedene Schlüsselfolgen

Beispiel Einfügereihenfolge I

Einfügereihenfolge 1:

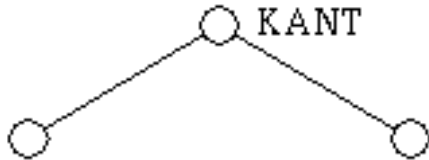
KANT, LEIBNIZ, HEGEL, HUME, LOCKE, SOCRATES,
SPINOZA, DESCARTES, CARNAP, FREGE, PLATON



Beispiel Einfügereihenfolge II

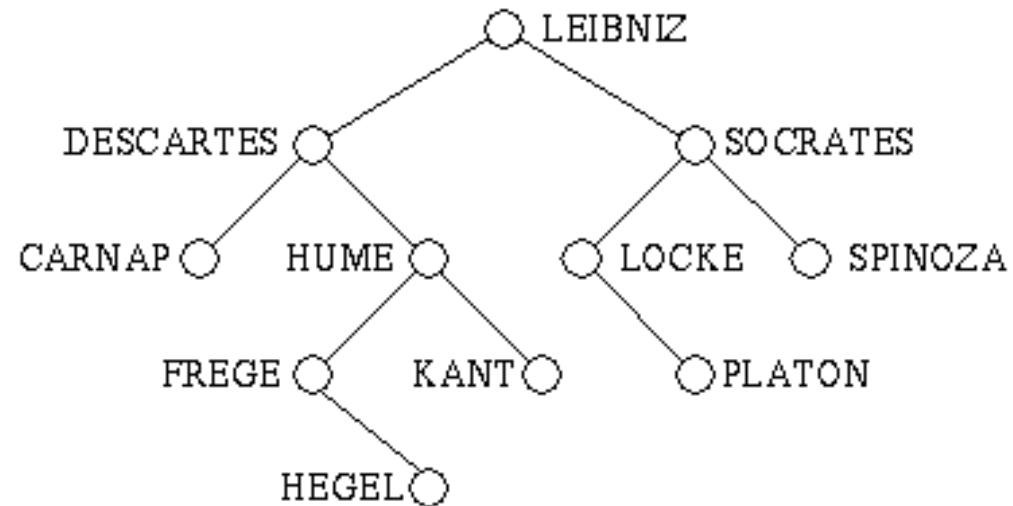
Einfügereihenfolge 1:

KANT, LEIBNIZ, HEGEL, HUME, LOCKE, SOCRATES,
SPINOZA, DESCARTES, CARNAP, FREGE, PLATON



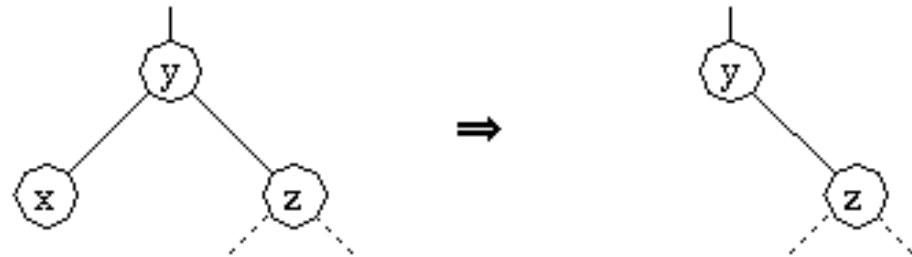
Einfügereihenfolge 2:

LEIBNIZ, DESCARTES, CARNAP, HUME,
SOCRATES, FREGE, LOCKE, KANT, HEGEL,
PLATON, SPINOZA

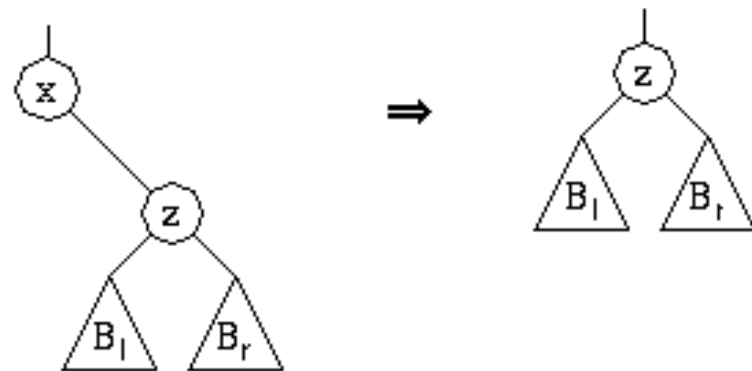


Löschen in binären Suchbäumen

Fall 1: x ist Blatt

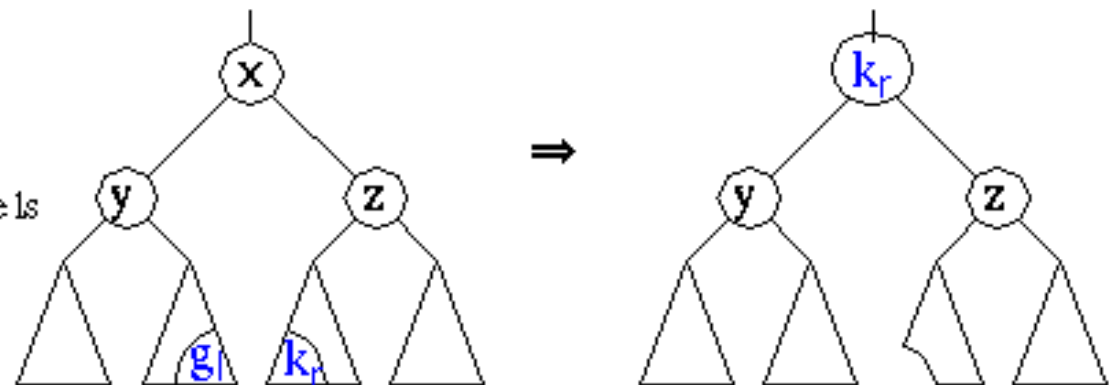


Fall 2/3: x hat leeren linken/rechten Unterbaum

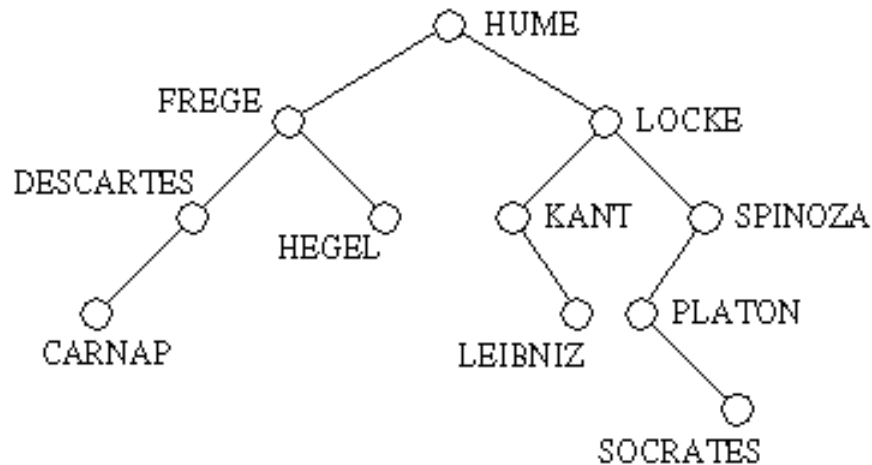


Fall 4: x hat zwei nicht-leere Unterbäume

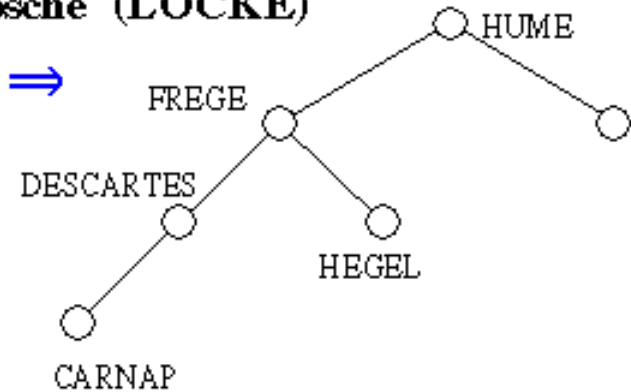
Heranziehen des größten Schlüssels im linken Unterbaum (g_l) oder des kleinsten Schlüssels im rechten Unterbaum (k_r)



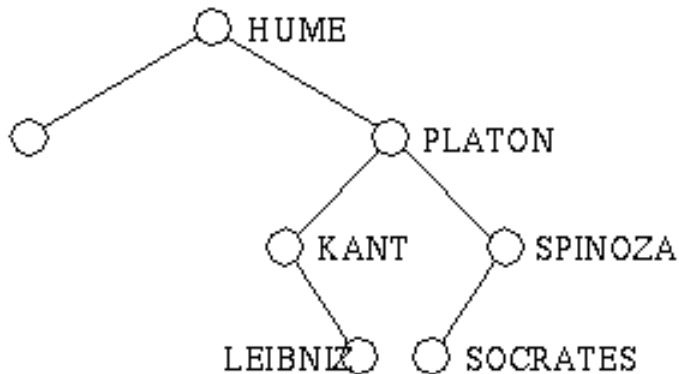
Beispiele: Löschen



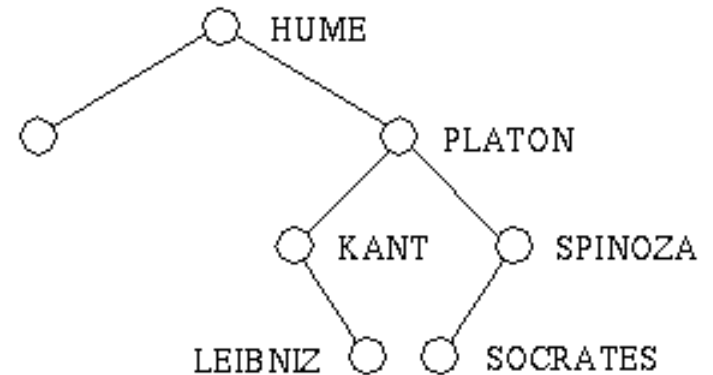
Lösche (LOCKE)



Lösche (DESCARTES)



Lösche (FREGE)



Markieren statt Löschen

Alternative: Jeder zu löschende Knoten wird speziell markiert; bei Such- und Einfügevorgängen wird er gesondert behandelt.

Vorgehen:

- Bei der Suche den gelöschten Knoten nur zur Entscheidung benutzen, ob links oder rechts weitergesucht wird.
- Bei erneutem Einfügen den Wert neu als Blatt einfügen oder Löschmarkierung entfernen.

Achtung: Beim Löschen wird kein Speicher frei!

Binäre Suchbäume: Zugriffskosten

Kostenmaß: Anzahl der aufgesuchten Knoten bzw. Anzahl der benötigten Suchschritte oder Schlüsselvergleiche.

Kosten der Grundoperationen für

- sequentielle Suche
- Einfügen, Löschen, direkte Suche

Bestimmung der mittleren Zugriffskosten \bar{z} (direkte Suchkosten)

- Zunächst Berechnung seiner gesamten Pfadlänge PL als Summe der Längen der Pfade von der Wurzel bis zu jedem Knoten K_i .

$$PL(B) = \sum_{i=1}^n \text{Stufe}(K_i)$$

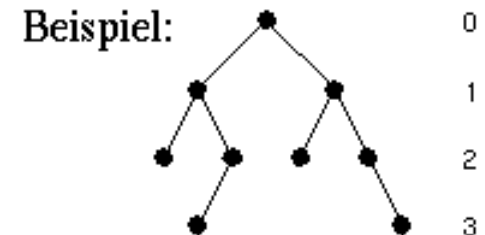
- Mit $n_i =$ Zahl der Knoten auf Stufe i gilt

$$PL(B) = \sum_{i=0}^{h-1} i \cdot n_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{h-1} n_i = n = \text{gesamte Knotenzahl}$$

- Die mittlere Pfadlänge ergibt sich zu $p = PL / n$
- Da bei jedem Zugriff noch auf die Wurzel zugegriffen

werden muß, erhält man

$$\bar{z} = p + 1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{h-1} (i+1) \cdot n_i$$



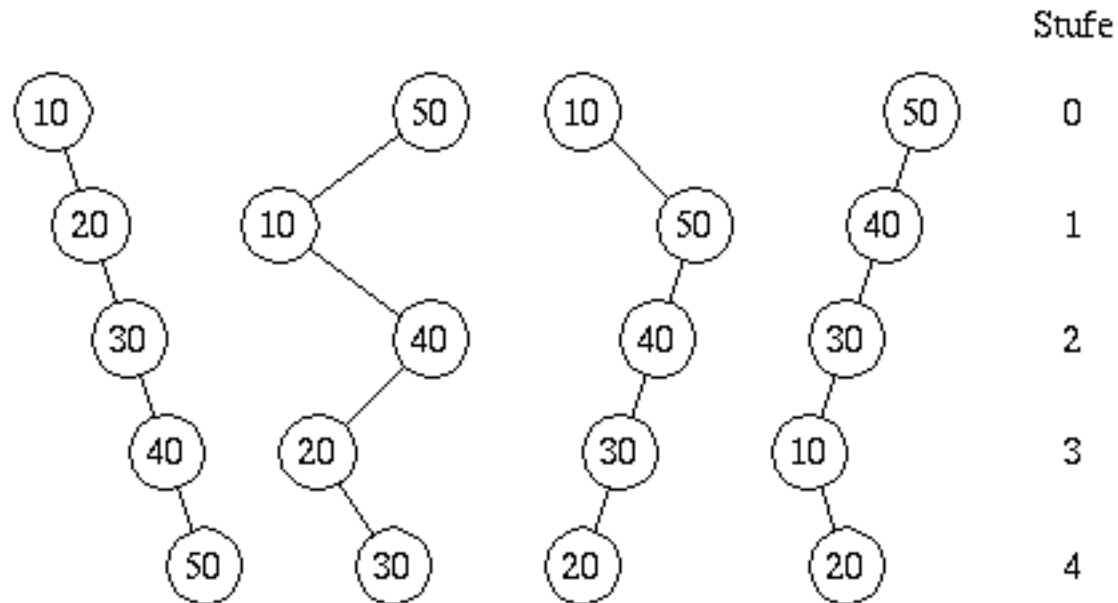
Maximale Zugriffskosten

Die längsten Suchpfade und damit die maximalen Zugriffskosten ergeben sich, wenn der binäre Suchbaum zu einer linearen Liste entartet

- Höhe: $h = l_{\max} + 1 = n$

- Max. mittl. Zugriffskosten:

$$\bar{z}_{\max} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot 1 = n \cdot \frac{(n+1)}{2n} = \frac{(n+1)}{2} = O(n)$$



Minimale (mittlere) Zugriffskosten

Minimale (mittlere) Zugriffskosten: können in einer fast vollständigen oder ausgeglichenen Baumstruktur erwartet werden

- Gesamtzahl der Knoten: $2^{h-1}-1 < n < 2^h$

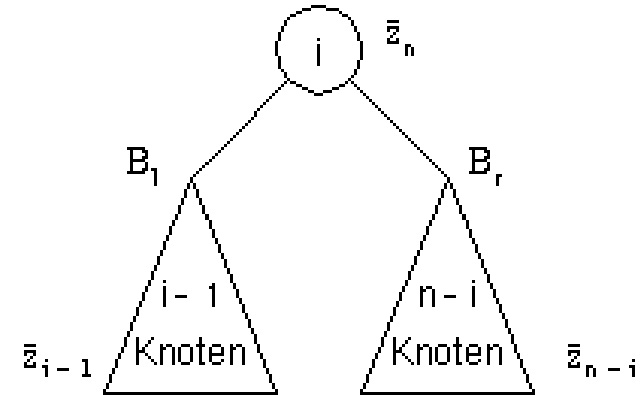
- Höhe: $h = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

- Minimale mittlere Zugriffskosten: $\bar{z}_{\min} \approx \log_2 n - 1$ (Vollständiger Baum)

Differenz der mittleren zu den minimalen Zugriffskosten ist ein Maß für Dringlichkeit von Balancierungstechniken

Bestimmung der mittleren Zugriffskosten

- n verschiedene Schlüssel mit den Werten 1, 2, ..., n seien in zufälliger Reihenfolge gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Schlüssel den Wert i besitzt, ist 1/n (Annahme: gleiche Zugriffswahrscheinlichkeit auf alle Knoten)



- Für den Baum mit i als Wurzel erhalten wir

$$\bar{z}_n(i) = \frac{1}{n} \cdot ((\bar{z}_{i-1} + 1) \cdot (i-1) + 1 + (\bar{z}_{n-i} + 1) \cdot (n-i))$$

- Die Rekursionsgleichung läßt sich in nicht-rekursiver, geschlossener Form mit Hilfe der

harmonischen Funktion $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ darstellen.

- Es ergibt sich $\bar{z}_n = 2 \cdot \frac{(n+1)}{n} \cdot H_n - 3 = 2 \ln(n) - c$.

- Relative Mehrkosten: $\frac{\bar{z}_n}{\bar{z}_{\min}} = \frac{2 \ln(n) - c}{\log_2(n) - 1} = 2 \ln(2) = 1,386\dots$