# Algorithmen und Datenstrukturen 1

## 6. Vorlesung

*Martin Middendorf / Peter F. Stadler*

Universität Leipzig
Institut für Informatik
*middendorf@informatik.uni-leipzig.de*
*studla@bioinf.uni-leipzig.de*

# Merge-Sort

Anwendbar für internes und externes Sortieren

Ansatz (Divide-and-Conquer-Strategie)

- rekursives Zerlegen in jeweils gleich große Teilfolgen
- Verschmelzen (Mischen) der sortierten Teilfolgen

Algorithmus (2-Wege-Merge-Sort)

`sort(A,l,r)` sortiert das Feld `A` im Bereich `l` bis `r`

```
Falls r-l=1: fertig
Falls r-l>1
   Mitte der Liste bestimmen:     int m = (l+r+1)/2
   linken Teil sortieren:         sort(A,l,m-1)
   rechten Teil sortieren:        sort(A,m,r)
   zusammenfügen:           merge(A,l,m,r)
```

# Mischen für Merge-Sort

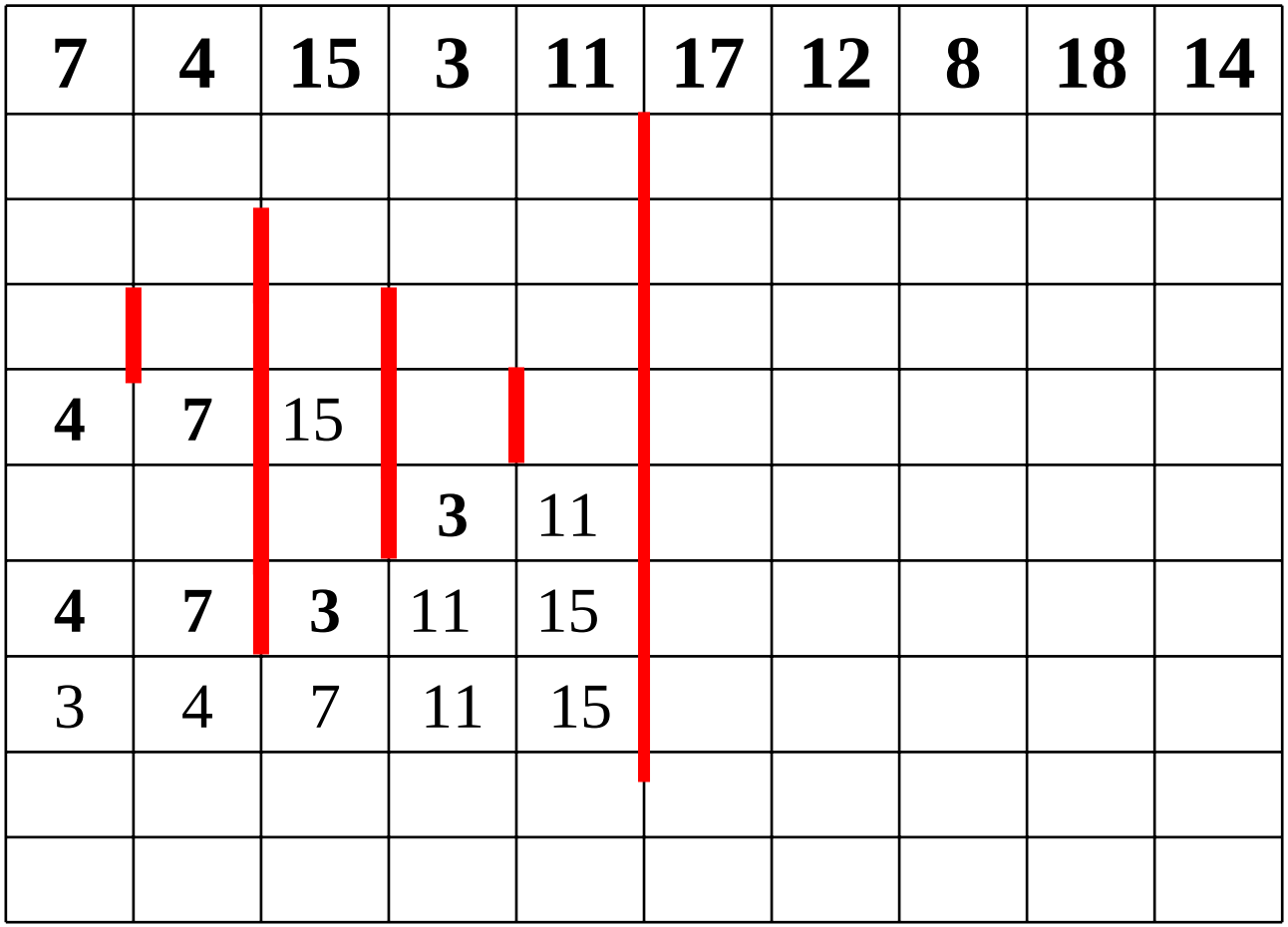
Pro Teilliste wird Zeiger (Index) auf nächstes Element geführt

- jeweils kleinstes Element wird in Ergebnisliste übernommen und Indexzeiger fortgeschaltet
- sobald eine Teilliste "erschöpft" ist, werden alle verbleibenden Elemente der anderen Teilliste in die Ergebnisliste übernommen
- lineare Kosten

`merge(A,l,m,r)` mischt die Bereiche `l` ... m-1 und m ... r in Feld `B` der Länge `r-l+1`

```
1. Schritt:             j=1; k=m
       Schleife zum Füllen von B:
                        for i=0; i<r-l+1; i++
       Auswahl:                 if k>r or (j<m and A[j]<A[k])
                                        B[i] = A[j++]
                                else
                                        B[i] = A[k++]
2. Schritt: Übertragen: for (i=0, i< r-l+1); i++)  A[l+i] = B[i]
```

# Beispiel Merge-Sort



# Direktes (reines, nicht-rekursives) 2-Wege-Merge-Sort

**Algorithmus**

- zunächst werden benachbarte Elemente zu sortierten Teillisten der Länge 2 gemischt
- fortgesetztes Mischen benachbarter (sortierter) Teillisten
- Länge sortierter Teillisten verdoppelt sich pro Durchgang
- Sortierung ist beendet, sobald in einem Durchgang nur noch zwei Teillisten verschmolzen werden

# Beispiel Direktes Merge-Sort

| 7 | 4 | 15 | 3 | 11 | 17 | 12 | 8 | 18 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 3 | 15 | 11 | 17 | 8 | 12 | 14 | 18 |
| 3 | 4 | 7 | 15 | 8 | 11 | 12 | 17 | 14 | 18 |
| 3 | 4 | 7 | 8 | 11 | 12 | 15 | 17 | 14 | 18 |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

# Natürliches 2-Wege-Merge-Sort

**Algorithmus**

- statt mit 1-elementigen Teillisten zu beginnen, werden bereits anfangs möglichst lange sortierte Teilfolgen ("runs") verwendet
- Nutzung einer bereits vorliegenden (natürlichen) Sortierung in der Eingabefolge

# Beispiel Natürliches Merge-Sort

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **7** | **4** | **15** | **3** | **11** | **17** | **12** | **8** | **18** | **14** |
| **4** | **7** | **15** | **3** | **11** | **12** | **17** | **8** | **14** | **18** |
| **3** | **4** | **7** | **11** | **12** | **15** | **17** | **8** | **14** | **18** |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

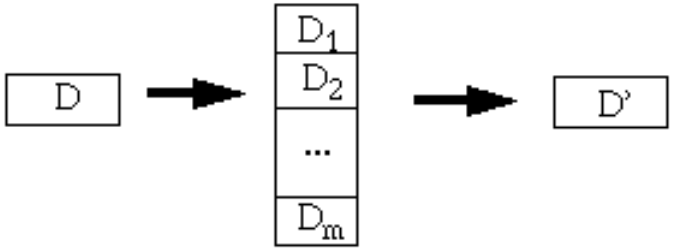
# Externes Sortieren

Anwendung, falls zu sortierende Daten nicht vollständig im Hauptspeicher gehalten werden können

Hauptziel: Minimierung von Externspeicherzugriffen

Ansatz

- Zerlegen der Eingabedatei in m Teildateien, die jeweils im Hauptspeicher sortiert werden können
- Interne Sortierung und Zwischenspeicherung der R
- Mischen der m Runs (m-Wege-Mischen)




Bewertung

- optimale E/A-Kosten (1 Durchgang)
- setzt Dateispeicherung auf Direktzugriffsmedium (z.B. Magnetplatten) voraus, da ggf. sehr viele temporäre Dateien $D_i$
- verfügbarer Hauptspeicher muß wenigstens m+1 Seiten (Blöcke) umfassen

# Sortieren mit Bändern

Restriktiver, da hier kostengünstig nur sequenzielle Zugriffe möglich sind.

- Ausgeglichenes 2-Wege-Merge-Sort (4 Bänder)
- Ausgeglichenes k-Wege-Merge-Sort (2k Bänder)

## Ausgeglichenes 2-Wege-Merge-Sort

- vier Bänder B1, B2, B3, B4; Eingabe sei auf B1; Hauptspeicher fasse r Datensätze
- Wiederholtes Lesen von r Sätzen von B1, interne Sortierung und abwechselndes Ausschreiben der Runs auf B3 und B4 bis B1 erschöpft ist
- Mischen der Runs von B3 und B4 (ergibt Runs der Länge 2r) und abwechselndes Schreiben auf B1 und B2
- Fortgesetztes Mischen und Verteilen bis nur noch 1 Run übrig bleibt

# Beispiel: Sortieren mit 4 Bändern, r=4

| Band | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **14** | **4** | **3** | **17** | **22** | **5** | **25** | **13** | **9** | **10** | **1** | **11** | **12** | **6** | **2** | **15** |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 3 | 4 | 14 | 17 | 1 | 9 | 10 | 11 | | | | | | | | |
| 4 | 5 | 13 | 22 | 25 | 2 | 6 | 12 | 15 | | | | | | | | |
| 1 | 3 | 4 | 5 | 13 | 14 | 17 | 22 | 25 | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 6 | 9 | 10 | 11 | 12 | 15 | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |

# Verbesserungen beim Merge-Sort

**Ausgeglichenes k-Wege-Merge-Sort**

- k-Wege-Aufteilen und k-Wege-Mischen mit 2k Bändern

**Mischen bei Mehrwege-Merge-Sort durch Auswahlbaum** (Turnier-Sortierung oder Heap-Sort) beschleunigen: *Replacement Selection Sort*

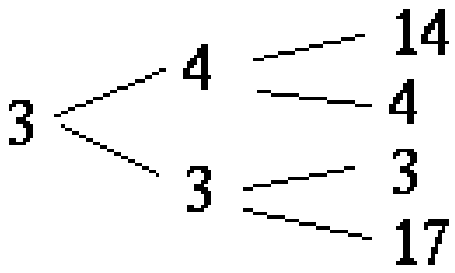
Bei k Schlüsseln kann Entfernen des Minimums und Hinzufügen eines neuen Schlüssels in O(log k) Schritten erfolgen

Auswahlbaum kann auch bei unsortierter Eingabe (initiale Zerlegung) genutzt werden, um Länge der erzeugten Runs zu erhöhen => Sortierung erfordert weniger Durchgänge

- ausgegebenes (Wurzel-) Element wird im Auswahlbaum durch nächstes Element x aus der Eingabe ersetzt
- x kann noch im gleichen Run untergebracht werden, sofern x nicht kleiner als das größte schon ausgegebene Element ist
- Ersetzung erfolgt solange bis alle Schlüssel im Auswahlbaum kleiner sind als der zuletzt ausgegebene (=> neuer Run)
- im Mittel verdoppelt sich die Run-Länge (auf 2r)

# Beispiel: Replacement Selection Sort

Beispiel 14, 4, 3, 17, 22, 5, 25, 13, 9, 10, 1, 11, 12, 6, 2, 15 (r=4)




22, 5, 25, 13, 9, 10, 1, 11, 12, 6, 2, 15

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 4 | 3 | 17 | 22 | 5 | 25 | 13 | 9 | 10 | 1 | 11 | 12 | 6 | 2 | 15 |
| 3 | 14 | 4 | 22 | 17 | | | | | | | | | | | |
| 3 | 4 | 14 | 5 | 22 | 17 | | | | | | | | | | |
| 3 | 4 | 5 | 14 | 25 | 22 | 17 | | | | | | | | | |
| 3 | 4 | 5 | 14 | 13 | 25 | 22 | 17 | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | |

# Zusammenfassung

Kosten allgemeiner Sortierverfahren wenigstens O (n log n)

Elementare Sortierverfahren: Kosten O (n2)

- einfache Implementierung; ausreichend bei kleinem n
- gute Lösung: Insertion Sort

O(n log n)-Sortierverfahren: Heap-Sort, Quick-Sort, Merge-Sort

- Heap-Sort und Merge-Sort sind Worst-Case-optimal (O (n log n))
- in Messungen erzielte Quick-Sort in den meisten Fällen die besten Ergebnisse

Begrenzung der Kosten für Umkopieren durch indirekte Sortierverfahren

Vorteilhafte Eigenschaften

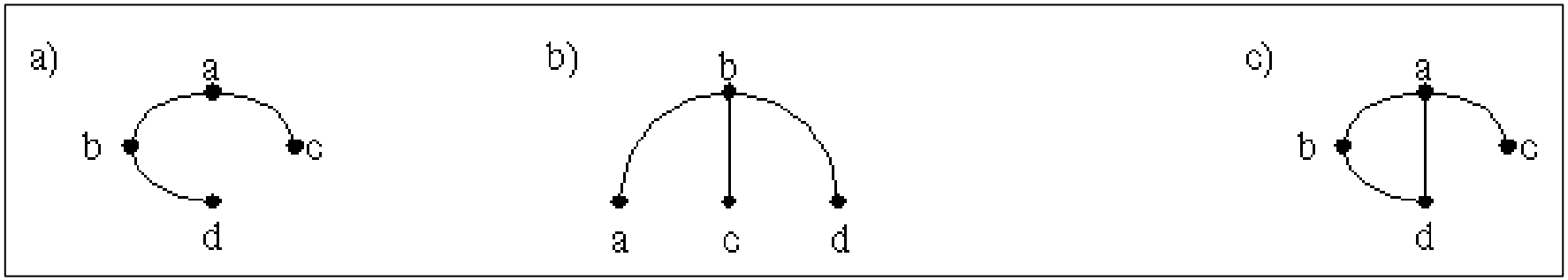
- Ausnutzen einer weitgehenden Vorsortierung
- Stabilität

Externes Sortieren

- fortgesetztes Zerlegen und Mischen
- Mehrwege-Merge-Sort reduziert Externspeicherzugriffe

# Wiederholung: Bäume

Bäume lassen sich als sehr wichtige Klasse von Graphen auffassen




Danach ist ein Baum

- ein azyklischer, einfach zusammenhängender Graph
- d.h., er enthält keine Schleifen und Zyklen; zwischen jedem Paar von Knoten besteht höchstens eine Kante

# Orientierte Bäume

Eine Menge B von Objekten ist ein orientierter (Wurzel-) Baum, falls

1. in B ein ausgezeichnetes Element w - Wurzel von B - existiert
2. die Elemente in B - {w} disjunkt zerlegt werden können in $B_1$, $B_2$,..., $B_m$, wobei jedes $B_i$ ebenfalls ein orientierter Baum ist.

Anschaulich:

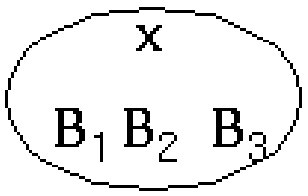
- Die Kanten des Graphen sind gerichtet.
- Von der Wurzel gehen nur Kanten aus, keine treffen ein.
- Jeder Knoten ist von der Wurzel aus auf genau einem Weg entlang der gerichteten Kanten erreichbar.
- Für jeden Nicht-Wurzelknoten gibt es Knoten, die nicht entlang der gerichteten Kanten erreichbar sind.

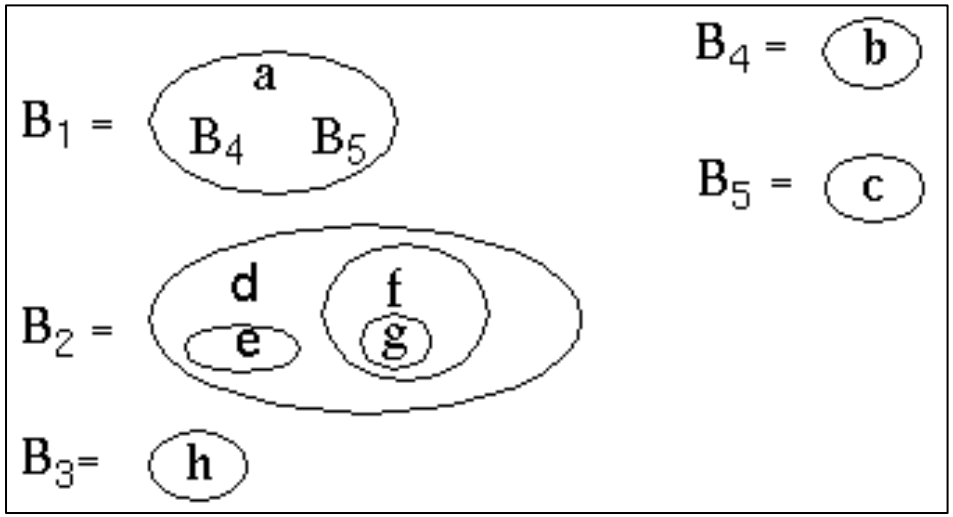
# Darstellungsarten für orientierte Bäume I

1. Mengendarstellung:

   Objekte: a, b, c, ...

   Bäume: $B_1$, $B_2$, $B_3$, ...




2. Klammerdarstellung: Wurzel = erstes Element innerhalb eines Klammerpaares

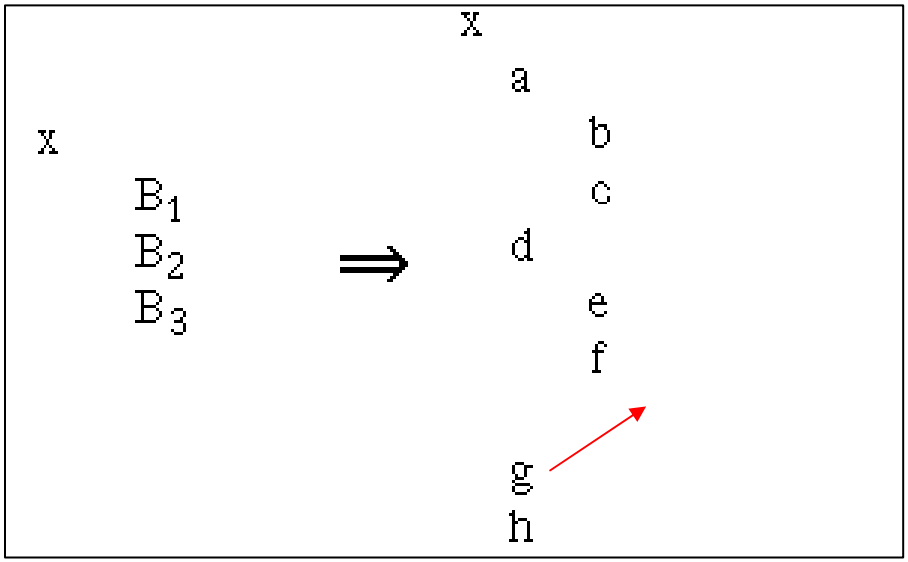
$$\{x, B_1, B_2, B_3\}$$

$$\{x, \underbrace{\{a, \{b\}, \{c\}\}}_{B1}, \underbrace{\{d, \{e\}, \{f, \{g\}\}\}}_{B2}, \underbrace{\{h\}}_{B3}\}$$

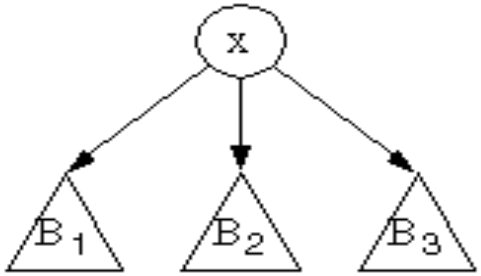
$$\{a, \{b\}, \{c\}\} \equiv \{a, \{c\}, \{b\}\}$$

# Darstellungsarten für orientierte Bäume II

3. Rekursives Einrücken




4. Graphendarstellung



# Graphendarstellung orientierter Bäume

Wurzel: x
Blätter: 5
innere Knoten: x,a,d,f
Grad K = # Nachfolger von K
    Grad (x) = 3
    Grad (g) = 0
Grad (Baum) = Max (Grad($K_i$)) = 3
Stufe ($K_i$) = Pfadlänge l von Wurzel nach $K_i$
    Stufe 0: x
    Stufe 1: a, d, h
    Stufe 2:
    Stufe 3:
Höhe h = 4
Gewicht w = # der Blätter = 5