Algorithmen und Datenstrukturen 1

3. Vorlesung

Peter F. Stadler

Universität Leipzig
Institut für Informatik
studla@bioinf.uni-leipzig.de

3. Verkettete Listen, Stacks, Queues

Verkettete lineare Listen

- einfache Verkettung
- doppelt verkettete Listen
- Vergleich der Implementierungen

Fortgeschrittenere Kettenstrukturen

- Skip-Listen

Spezielle Listen: Stack, Queue, Priority Queue

- Operationen
- formale ADT-Spezifikation
- Anwendung

Verkettete Speicherung linearer Listen

Sequentielle Speicherung erlaubt schnelle Suchverfahren

- falls Sortierung vorliegt
- da jedes Element über Indexposition direkt ansprechbar

Nachteile der sequentiellen Speicherung

- hoher Änderungsaufwand durch Verschiebekosten: O(n)
- schlechte Speicherplatzausnutzung
- inflexibel bei starkem dynamischem Wachstum

Abhilfe: verkettete lineare Liste (Kette)

Spezielle Kennzeichnung erforderlich für

- Listenanfang (Anker)
- Listenende
- leere Liste

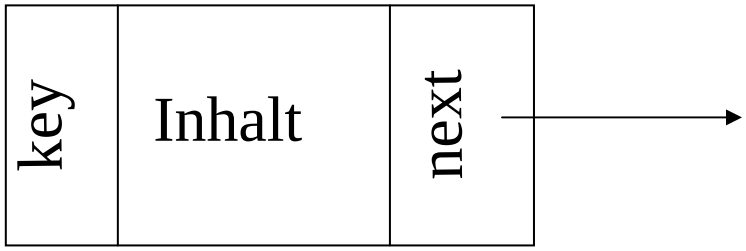
Verkettete Liste: Implementierung 1

Implementierung 1:

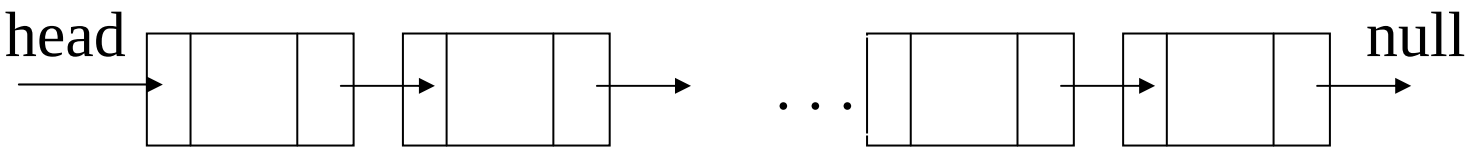
- Listenanfang wird durch speziellen Zeiger head (Kopf, Anker) markiert
- Leere Liste: head = null
- Listenende: Next-Zeiger = null

Verkettete Listen – Implementierung

Listenelement:

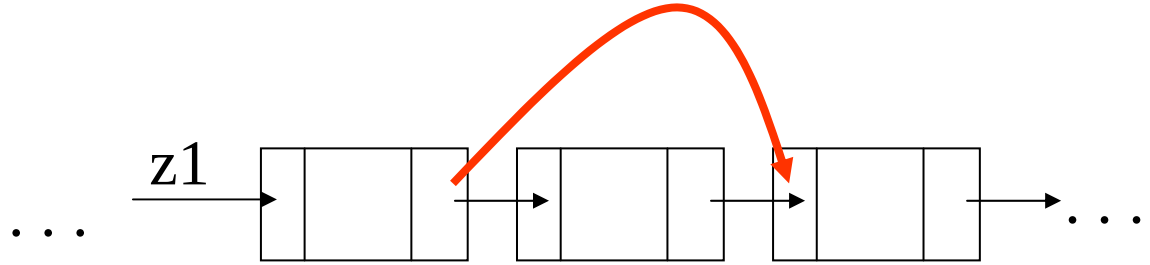


Liste = head – Zeiger auf das erste Listenelement
Listenende: Next-Zeiger = null – Zeiger



Verkettete Listen – Löschen

Löschen:




```
if ( z1 != null  AND  z1 -> next != null )
z1 -> next = z1 -> next -> next
```

Verkettete Liste: Implementierung 1

Beispiel: Suchen von Schlüsselwert x

1. (Initialisieren): Setze aktuelles_Element := head
2. (Test): Gesuchtes Element hier gefunden? Falls ja,return(„gefunden“).
3. (Abbruch?): aktuelles_Element = Listenende? Falls ja, return(„nicht gefunden“).
4. (Iteration): Setze aktuelles_Element := nächstes_Element. Gehe zu 2.

D.h., nur sequentielle Suche möglich (sowohl im geordneten als auch im ungeordneten Fall) !

Nachteile:

Einfügen und Löschen eines Elementes mit Schlüsselwert x erfordert vorherige Suche

Bei Listenoperationen müssen Sonderfälle stets abgeprüft werden (Zeiger auf Null prüfen etc.)

Fragen: Wie funktioniert Löschen eines Elementes an Position (Zeiger) p ?

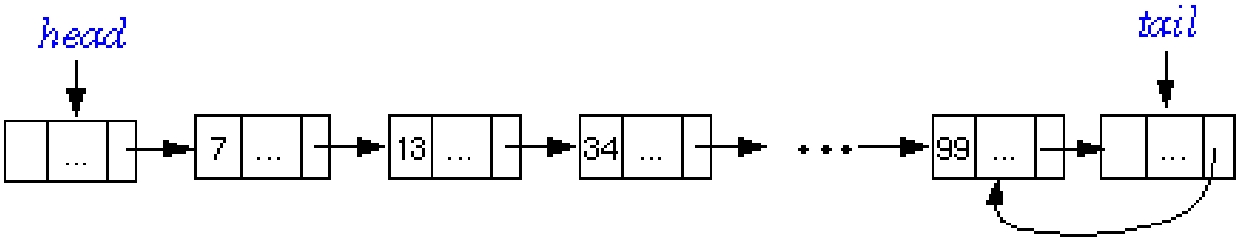
Wie funktioniert Hintereinanderfügen von 2 Listen ?

Verkettete Listen – Suchen

Suche key = x:
Beginn: Zeiger = head.
while (Zeiger -> key != x) Zeiger = Zeiger -> next;
Abbruch....
(Das gesuchte Element soll enthalten sein.)

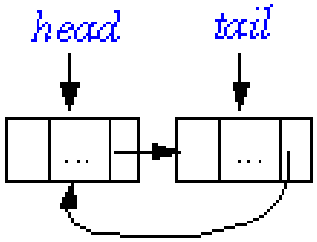
Verkettete Liste: Implementierung 2

Dummy- (uneigentliches) Element am Listenanfang sowie am Listenende (Zeiger head und tail)



- Next-Zeiger des Dummy-Elementes am Listenende verweist auf vorangehendes Element (erleichtert Hintereinanderfügen zweier Listen und Abprüfen von Sonderfällen)
- Die Liste ist durch die Zeiger head und tail gegeben.

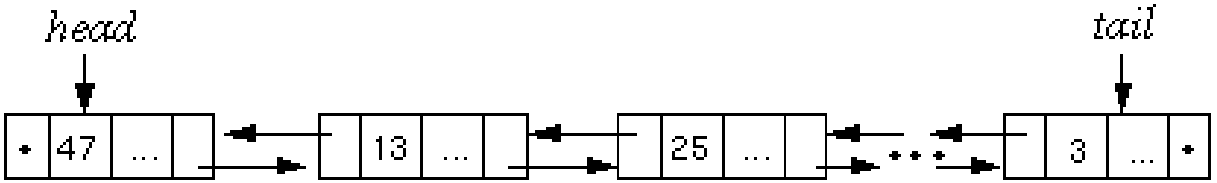
- Leere Liste:



Leer falls
head -> next -> next = head

Verkettete Liste: Implementierung 3

Doppelt gekettete Liste



Bewertung:

- höherer Speicherplatzbedarf als bei einfacher Verkettung
- Aktualisierungsoperationen etwas aufwendiger (Anpassung der Verkettung)
- Suchaufwand in etwa gleich hoch, jedoch ggf. geringerer Suchaufwand zur Bestimmung des Vorgängers (Operation PREVIOUS (L, p))
- geringerer Aufwand für Operation DELETE (L, p)

Flexibilität der Doppelverkettung besonders vorteilhaft, wenn Element gleichzeitig Mitglied mehrerer Listen sein kann (Multilist-Strukturen)

Vergleich verketteter Listen

Suchaufwand bei ungeordneter Liste

- erfolgreiche Suche: $C_{avg} = \frac{n+1}{2}$

  (Standardannahmen: zufällige Schlüsselauswahl; stochastische Unabhängigkeit der gespeicherten Schlüsselmenge)
- erfolglose Suche: vollständiges Durchsuchen aller n Elemente

Einfügen oder Löschen eines Elements

- konstante Kosten für Einfügen am Listenanfang
- Löschen verlangt meist vorherige Suche
- konstante Löschkosten bei positionsbezogenem Löschen und Doppelverkettung

Sortierung bringt kaum Vorteile

- erfolglose Suche verlangt im Mittel nur noch Inspektion von (n+1)/2 Elementen

  (Bei Abbruch der Suche mit gleicher Wahrscheinlichkeit an allen Positionen der Liste)
- lineare Kosten für Einfügen in Sortierreihenfolge

Vergleichstabelle

VERGLEICH der 3 Implementierungen	Implem. 1	Implem. 2	Implem. 3 (Doppelkette)
Einfügen am Listenanfang			
Einfügen an gegebener Position			
Löschen an gegebener Position			
Suchen eines Wertes			
Hintereinanderfügen von 2 Listen			

Erklärungen:
Position = Zeiger auf Listenelement bzw. auf next – Zeiger des Vorgängers (implementierungsabhängig)

Skip-Listen

Ziel: verkettete Liste mit logarithmischem Aufwand für Suche, Einfügen und Löschen von Schlüsseln (Wörterbuchproblem)

- Verwendung sortierter verkettet gespeicherter Liste mit zusätzlichen Zeigern

Prinzip

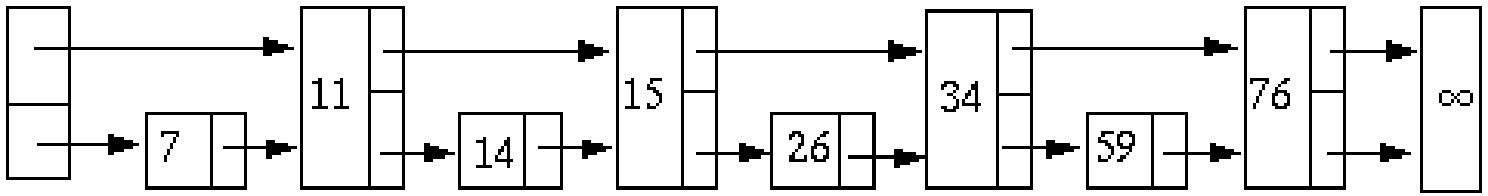
- Elemente werden in Sortierordnung ihrer Schlüssel verkettet
- Führen *mehrerer* Verkettungen auf unterschiedlichen Ebenen:

  Verkettung auf Ebene 0 verbindet alle Elemente;

  Verkettung auf Ebene 1 verbindet jedes zweite Element;

  …

  Verkettung auf Ebene i verbindet jedes 2^i-te Element (i = 0,1,...)



Perfekte Skip-Liste - Anzahl Zeiger

Zahl der Zeiger der eigentlichen Elemente: Sei $n = 2^k$. Zahl der Zeiger

Auf Ebene 0: n

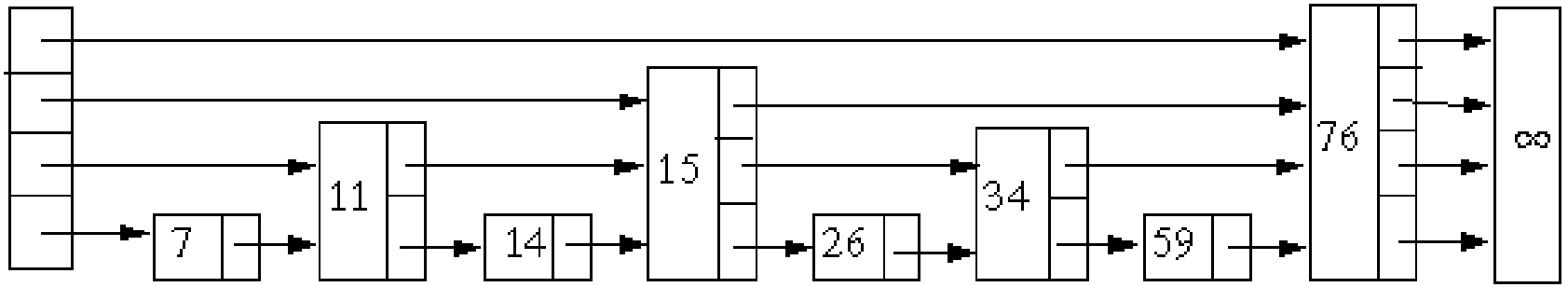
Auf Ebene 1: n/2

⋮

Auf Ebene $k = \log_2 n$: 1 (Zeiger von Element 1 auf tail-Element)

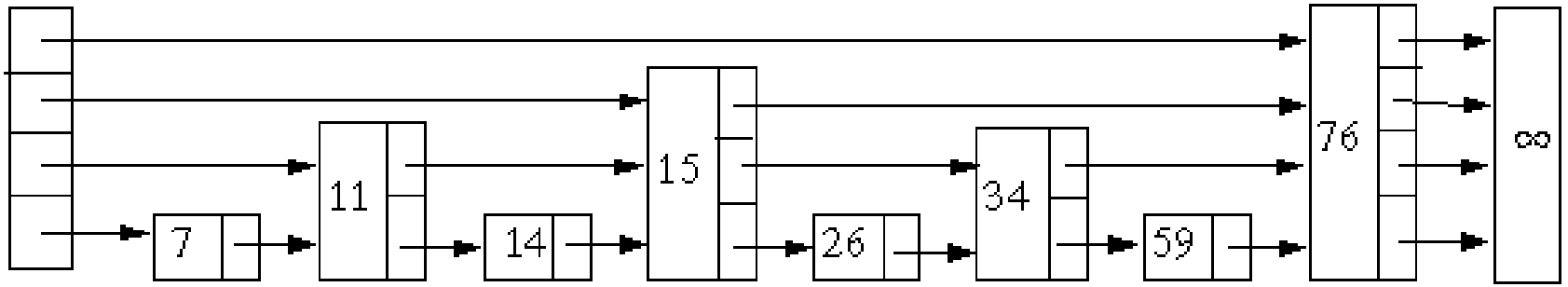
Gesamtzahl: $n + \frac{n}{2} + \ldots + 1 = \sum_{i=0}^{k} \frac{n}{2^i} \leq 2n$

denn $\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} = 2\text{-}2^{-k}$ oder mit geometrischer Reihe: $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \ldots$ und $a = 2$.



Perfekte Skip-Liste – Kosten

Anzahl der Ebenen (Listenhöhe): $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$



- Jedes eigentliche Element hat höchstens $\lfloor \log_2 n \rfloor$ Zeiger
- max. Gesamtanzahl der Zeiger $< 2n$ (ähnlich doppelt verketteter Liste)
- Suche: O (log n)

Perfekte Skip-Listen zu aufwendig bezüglich Einfügungen und Löschvorgängen

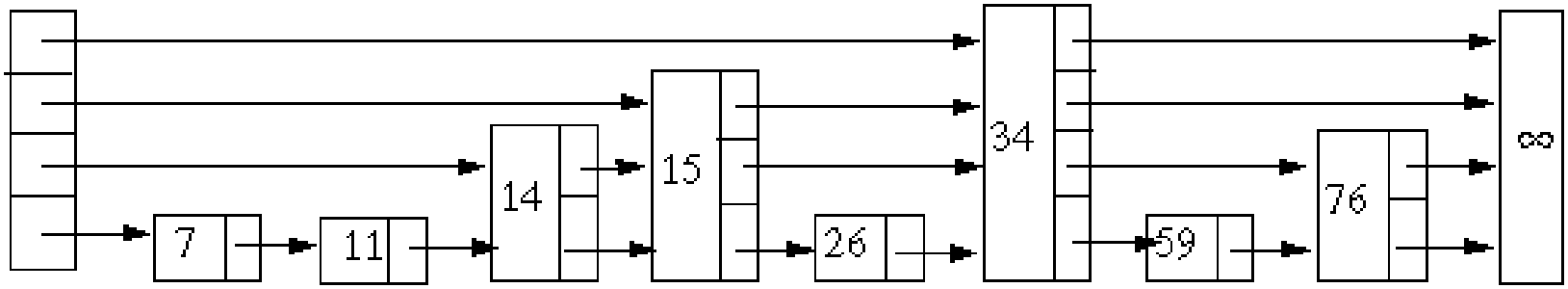
- vollständige Reorganisation erforderlich
- Kosten O (n)

Randomisierte Skip-Listen

- Strikte Zuordnung eines Elementes zu einer Höhe (Anzahl der Ebenen) wird aufgegeben
- Höhe eines neuen Elementes x wird nach Zufallsprinzip ermittelt, jedoch so daß die relative Häufigkeit der Elemente pro Ebene (Höhe) eingehalten wird, d.h.

  $$P(\text{Höhe von } x = i) = 1 / 2^i \quad (\text{für Höhen } i = 1,2,...)$$

- Somit entsteht eine "zufällige" Struktur der Liste



Kosten für Einfügen und Löschen im wesentlichen durch Aufsuchen der Einfügeposition bzw. des Elementes bestimmt: O(log N)

Stacks als spezielle Listen

Synonyme: Stapel, Keller, LIFO-Liste usw.

Stack kann als spezielle Liste aufgefaßt werden, bei der alle Einfügungen und Löschungen nur an einem Ende, TOP genannt, vorgenommen werden

Stack-Operationen (ADT):

- CREATE: Erzeugt den leeren Stack
- INIT(S): Initialisiert S als leeren Stack
- PUSH(S, x): Fügt das Element x als oberstes Element von S ein
- POP(S): Löschen des Elementes, das als letztes in den Stack S eingefügt wurde
- TOP(S): Abfragen des Elementes, das als letztes in den Stack S eingefügt wurde
- EMPTY(S): Abfragen, ob der Stack S leer ist

Alle Operationen mit konstanten Kosten realisierbar: O(1)

Formale ADT-Spezifikation: Stacks

Formale ADT-Spezifikation zur Festlegung der implementierungsunabhängigen Stack-Eigenschaften

- ELEM = Wertebereich der Stack-Elemente
- STACK = Menge der Zustände, in denen sich der Stack befinden kann
- leerer Stack: $s_0 \in$ STACK
- Stack-Operationen werden durch ihre Funktionalität charakterisiert. Ihre Semantik wird durch Axiome festgelegt.

Definitionen:

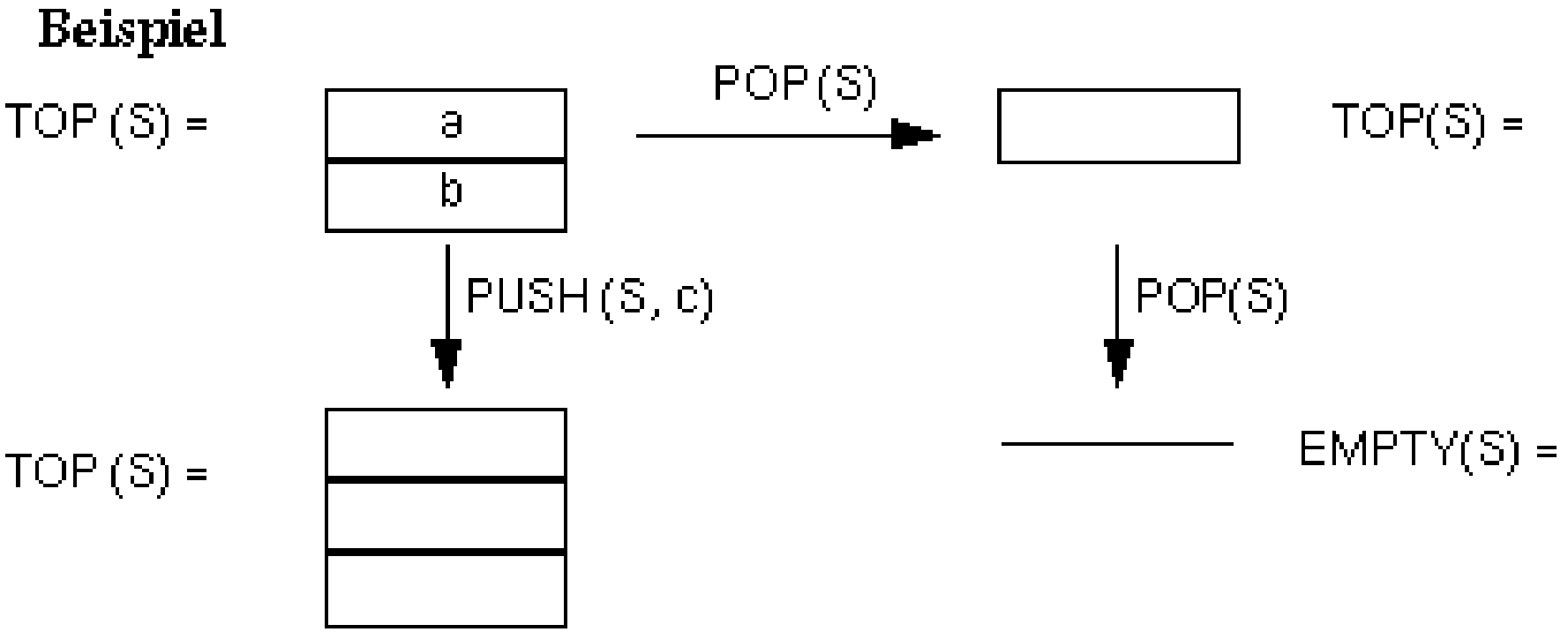
Datentyp STACK

Basistyp ELEM

Operationen:

CREATE:			$\rightarrow$ STACK;
INIT:	STACK		$\rightarrow$ STACK;
PUSH:	STACK $\times$ ELEM		$\rightarrow$ STACK
POP:	STACK $\setminus \{s_0\}$		$\rightarrow$ STACK;
TOP:	STACK $\setminus \{s_0\}$		$\rightarrow$ ELEM;
EMPTY:	STACK		$\rightarrow$ {TRUE,FALSE}.

Beispiel: Operationen auf Stack



Anwendungsbeispiel 1: Erkennen wohlgeformter Klammerausdrücke

Definition

- ( ) ist ein wohlgeformter Klammerausdruck (wgK)
- Sind w_1 und w_2 wgK, so ist auch ihre Konkatenation w_1 w_2 ein wgK
- Mit w ist auch (w) ein wgK
- Nur die nach den vorstehenden Regeln gebildeten Zeichenreihen bilden wgK
- Beispiel: ((( )) ( )) ist wohlgeformt.

Algorithmus

Idee: Stapel zur Speicherung öffnender Klammern. Ablauf des Algorithmus:

- Einlesen des Ausdrucks von links nach rechts.
- Wird eine öffnende Klammer gelesen: Speichere diese im Stack
- Wird eine schließende Klammer gelesen: Entferne das oberste Stack-Element.
- wgK liegt vor, wenn Stack am Ende leer ist

Anwendungsbeispiel 2: Berechnung von Ausdrücken in Umgekehrter Polnischer Notation (Postfix-Ausdrücke)

Beispiel: (a+b) * (c+d/e) => a b + c d e / + *

Lösungsansatz

- Lesen des Ausdrucks von links nach rechts
- ist das gelesene Objekt ein Operand, wird es auf den STACK gebracht
- Ist das gelesene Objekt ein m-stelliger Operator, dann wird er auf die m obersten Elemente des Stacks angewandt. Das Ergebnis ersetzt diese m Elemente

Abarbeitung des Beispielausdrucks: (Der Stack wächst nach unten!)

UPN	a	b	+	c	d	e	/	+	x
Platz 1									
Platz 2									
Platz 3									
Platz 4									

Schlangen

Synonyme: FIFO-Schlange, Warteschlange, Queue

Spezielle Liste, bei der die Elemente an einem Ende (hinten) eingefügt und am anderen Ende (vorne) entfernt werden

Operationen:

- CREATE:	Erzeugt die leere Schlange
- INIT (Q):	Initialisiert Q als leere Schlange
- ENQUEUE (Q, x):	Fügt das Element x am Ende der Schlange Q ein
- DEQUEUE (Q):	Löschen des Elementes, das am längsten in der Schlange verweilt (erstes Element)
- FRONT (Q):	Abfragen des ersten Elementes in der Schlange
- EMPTY (Q):	Abfragen, ob die Schlange leer ist

Formale ADT-Spezifikation

formale ADT-Spezifikation

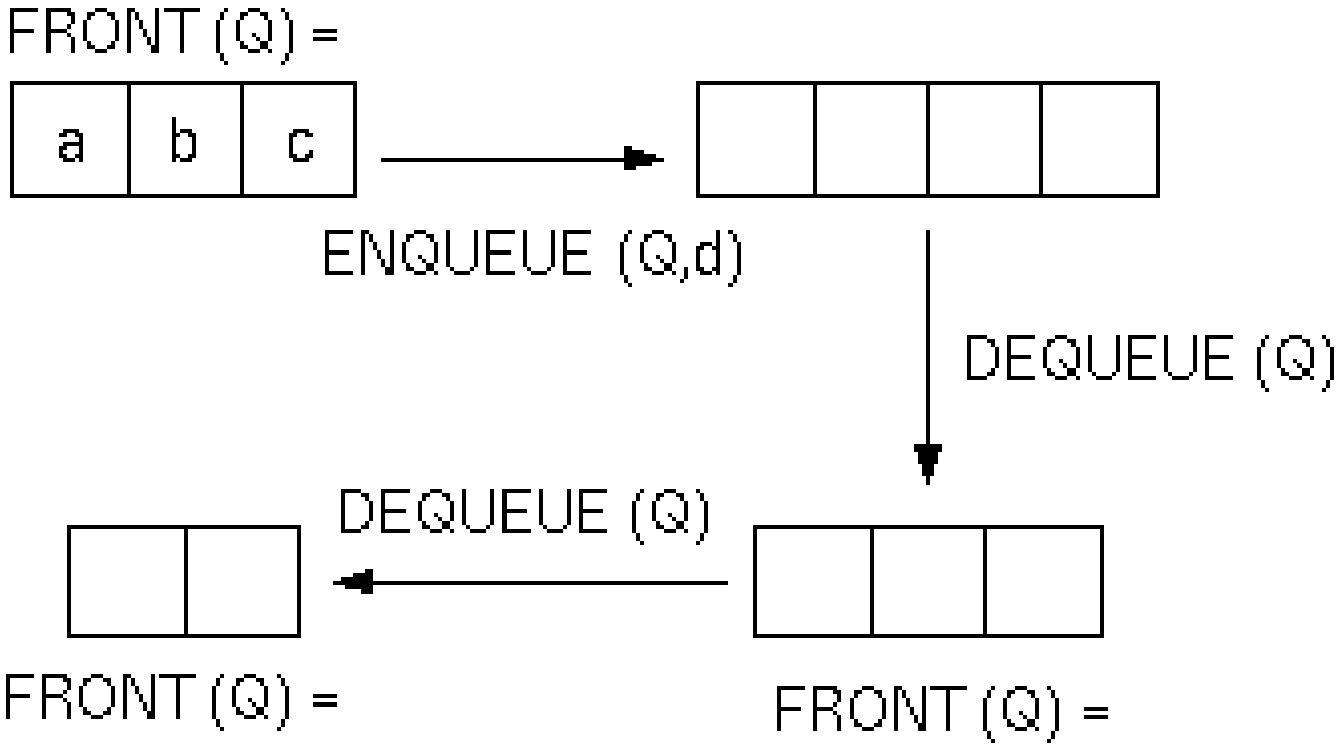
- ELEM = Wertebereich der Schlangen-Elemente
- QUEUE = Menge der möglichen Schlangen-Zustände
- leere Schlange: $q_0 \in$ QUEUE

Datentyp: QUEUE
Basistyp: ELEM
Operationen:

CREATE :		$\rightarrow$ QUEUE;
INIT :	QUEUE	$\rightarrow$ QUEUE;
ENQUEUE :	QUEUE $\times$ ELEM	$\rightarrow$ QUEUE;
DEQUEUE :	QUEUE-$\{q_0\}$	$\rightarrow$ QUEUE;
FRONT :	QUEUE-$\{q_0\}$	$\rightarrow$ ELEM;
EMPTY :	QUEUE	$\rightarrow$ {TRUE,FALSE}.

Beispiel: Operationen auf Queue

Beispiel:



Vorrangwarteschlangen (priority queues)

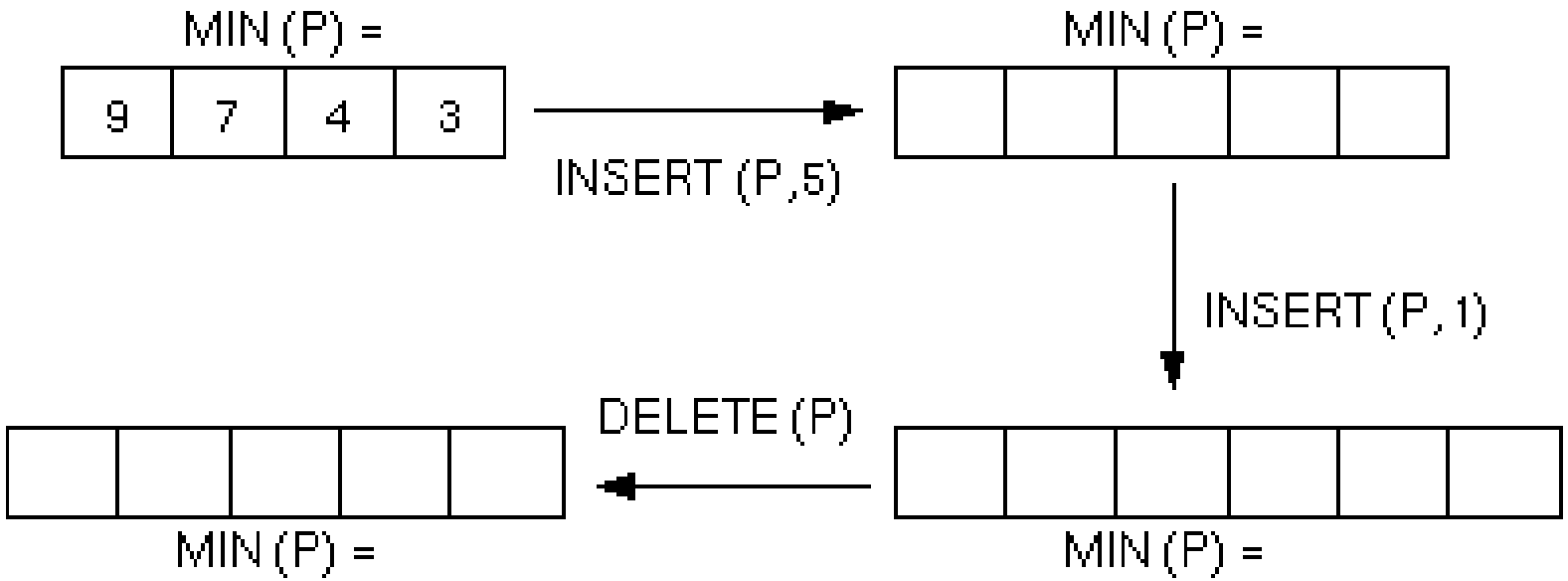
Jedes Element erhält Priorität. Entfernt wird stets Element mit der höchsten Priorität (Aufgabe des FIFO-Verhaltens einfacher Warteschlangen)

Operationen:

- CREATE: Erzeugt die leere Schlange
- INIT(P): Initialisiert P als leere Schlange
- INSERT(P, x): Fügt neues Element x in Schlange P ein
- DELETE(P): Löschen des Elementes mit der höchsten Priorität aus P
- MIN(P): Abfragen des Elementes mit der höchsten Priorität
- EMPTY(P): Abfragen, ob Schlange P leer ist.

Sortierung nach Prioritäten beschleunigt Operationen DELETE und MIN auf Kosten von INSERT.

Beispiel: Operationen auf PQueue



Zusammenfassung

Verkettete Listen

- dynamische Datenstrukturen mit geringem Speicheraufwand und geringem Änderungsaufwand
- Implementierungen: einfach vs. doppelt verkettete Listen
- hohe Flexibilität
- hohe Suchkosten

Skip-Listen

- logarithmische Suchkosten
- randomisierte statt perfekter Skip-Listen zur Begrenzung des Änderungsaufwandes

ADT-Beispiele: Stack, Queue, Priority Queue

- spezielle Listen mit eingeschränkten Operationen (LIFO bzw. FIFO)
- formale ADT-Spezifikation zur Festlegung der implementierungsunabhängigen Eigenschaften
- effiziente Implementierbarkeit der Operationen: O(1)
- zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten