Theoretische Biologie: Übungsaufgaben SoSe 2019

Vorstellung der Ergebnisse am 9.5.2019

Aufgabe 4: Analyse des Fuchs&Hasen Modells aus Vorlesung.

(a) Berechnen Sie allgemein die Jacobische Matrix für die (beiden) nicht-trivialen Fixpunkte und geben Sie Bedingungen an unter denen die Fixpunkte stabil/instabil und Quelle/Senke/Sattel sind.

(b) Finden Sie (positive) Parameterwerte für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta$ unter denen ein Fixpunkt mit $\hat{x} > 0$ and $\hat{y} > 0$ existiert und dieser instabil ist.

(c) Nutzen Sie ihr Programm aus Aufgabe 1/Aufgabe 2 und die Bahnen fuer einige Anfangsbedingungen für die in (b) ausgewählten Parameter-Werte.

Aufgabe 5: Lorenz Attraktor

Stellen Sie den *Lorenz-Attraktor*, i.e., die Langzeit-Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= x(b - z) - y \\ \dot{z} &= xy - cz \end{aligned} \tag{1}$$

mit Prandtl-Zahl $a = 10$, Rayleigh-Zahl $b = 28$, und $c = 8/3$ dar.

Was passiert, wenn Sie c systematisch im Bereich $[0.1, 100]$ variieren?

Aufgabe 6: Differenzengleichung $x_n = ax(1 - x)$.

Berechnen Sie das "Feigenbaum-Diagramm" (ω-Limes von generischen Anfangsbedingungen als Funktion des Parameters a). Vor ist vor allem der Bereich $a \in [2.9, 4.0]$.

Berechnen Sie den zugehoerigen diskreten Lyapunov-Exponenten und stellen Sie diesen parallel zum Feigenbaum-Diagramm von $x_n = ax(1 - x)$ dar.

Finden die Parameter-Bereiche, in denen der Attraktor ein periodischer Orbit mit genau 3, 5, 7, 11, 13 verschiendenen Punkten ist.

Gibt es auch Parameterwerte, für die, die Orbit-Länge des Attraktors genau 42 ist?

Aufgabe 7: Poincaré Schnitt.

Finden Sie für den Lorenzattraktor mit $c = 8/3$ eine geeignete Schnittebene und Stellen Sie die Durchstosspunkte durch diese Ebene graphisch dar. (Hinweis: Eine bequeme Methode ist, einen Punkt $P = (x, y, z)$ auf dem Attraktor festzulegen, und die Ebene dann so zu definieren, dass diese (1) P enthaelt und (2) orthogonal zum Vektorfeld der Lorenzgleichung am Punkt P liegt. Wählen Sie entlang der Bahn in jedem Umlauf jeweils den letzten Zeitpunkt vor und den ersten Zeitpunkt nach dem Durchstossen der Ebene und interpolieren Sie dazwischen linear, um die Punkte in der Ebene einigermassen genau zu bekommen. Das Koordinatensystem für die graphische Darstellung der Durchstosspunkte können Sie beliebig wählen.)

Was fällt auf, wenn Sie die Ebene an verschiedene Positionen entlang des Attraktors verschieben?