Algorithmen und Datenstrukturen II

SoSe 2010, **5. und 6. Aufgabenblatt**, Abgabe 23.06.2010

Aufgabe 13

10 Punkte

Gegeben sind die Zeichenketten $R = \texttt{EIDOTTER}$ und $S = \texttt{EIGENTOR}$. Berechnen Sie die Editier-Distanz zwischen R und S, wobei die Kosten für eine Insertion/Deletion und einen Mismatch jeweils 1 betragen. Geben Sie, analog zu Folie 4 in Vorlesung 9, zu allen Paaren von Präfixen die Editier-Kosten an. Die Zeichenkette S soll entlang der Horizontalen der Matrix stehen.

		E	I	G	E	N	T	O	R
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
E	1	0	1	2	3	4	5	6	7
I	2	1	0	1	2	3	4	5	6
D	3	2	1	1	2	3	4	5	6
O	4	3	2	2	2	3	4	4	5
T	5	4	3	3	3	3	3	4	5
T	6	5	4	4	4	4	3	4	5
E	7	6	5	5	4	5	4	4	5
R	8	7	6	6	5	5	5	5	5

Aufgabe 14

10 Punkte

Gegeben sei die folgende Entfernungsmatrix:

	1	2	3	4	5
1	0	5	13	8	17
2	7	0	9	4	14
3	12	10	0	6	7
4	8	4	9	0	11
5	15	14	8	12	0

Bestimmen Sie unter Verwendung des in der Vorlesung angegebenen Algorithmus die Länge der kürzesten Rundreise $g[1, 2, ..., n]$. Geben Sie alle ermittelten Zwischenwerte $g[i, S]$ an.

$g[2, \emptyset] = 7$ $\quad g[3, \emptyset] = 12$ $\quad g[4, \emptyset] = 8$ $\quad g[5, \emptyset] = 15$

$g[2, 3] = 21$ $\quad g[3, 2] = 17$ $\quad g[4, 2] = 11$ $\quad g[5, 2] = 21$
$g[2, 4] = 12$ $\quad g[3, 4] = 14$ $\quad g[4, 3] = 21$ $\quad g[5, 3] = 20$
$g[2, 5] = 29$ $\quad g[3, 5] = 22$ $\quad g[4, 5] = 26$ $\quad g[5, 4] = 20$

$g[2, 3, 4] = 23$ $\quad g[3, 2, 4] = 17$ $\quad g[4, 2, 3] = 25$ $\quad g[5, 2, 3] = 25$
$g[2, 3, 5] = 31$ $\quad g[3, 2, 5] = 28$ $\quad g[4, 2, 5] = 32$ $\quad g[5, 2, 4] = 23$
$g[2, 4, 5] = 30$ $\quad g[3, 4, 5] = 27$ $\quad g[4, 3, 5] = 31$ $\quad g[5, 3, 4] = 22$

$g[2, 3, 4, 5] = 35$ $\quad g[3, 2, 4, 5] = 30$ $\quad g[4, 2, 3, 5] = 35$ $\quad g[5, 2, 3, 4] = 25$

Länge des kürzesten Weges: $g[1, 2, 3, 4, 5] = 40$
kürzeste Rundreise: a) 1-2-4-3-5-1 b) 1-2-4-5-3-1

Aufgabe 15

6 Punkte

Auftragsplanung (vgl. 10. Vorlesung): Zeigen Sie, daß das Mengensystem $(E, \mathcal{M})$ ein Matroid ist.

Vor dem Beweis wiederholen wir die Definition von $\mathcal{M}$

$$A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{N} : |\{y \in A : d(y) \leq s\}| \leq s$$

Der Beweis selbst besteht aus zwei Teilen.

1. Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$ unter Teilmengenbildung: Sei $A \in \mathcal{M}$ und $B \subseteq A$. Dann ist

$$|\{y \in B : d(y) \leq s\}| \leq |\{y \in A : d(y) \leq s\}| \leq s$$

und deshalb $B \in \mathcal{M}$.

2. Austauscheigenschaft von $\mathcal{M}$. Für eine Teilmenge $X \subseteq E$ und $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir

$$N_t(X) := |\{y \in X : d(y) \leq t\} \ .$$

Seien $A, B \in \mathcal{M}$ mit $|B| < |A|$. Da $N_0(A) = N_0(B) = 0$ und $N_t(A) > N_t(B)$ für fast alle $t \in \mathbb{N}$ ist, gibt es

$$r := \max\{s \in \mathbb{N} : N_{s-1}(A) \leq N_{s-1}(B)\} \ .$$

Dann ist insbesondere

$$|\{y \in A : d(y) = r\}| > |\{y \in B : d(y) = r\}| \ ,$$

also gibt es $x \in A \setminus B$ mit $d(x) = r$.
Sei nun $s \in \mathbb{N}$. Ist $s < d(x)$, so haben wir

$$N_s(B \cup \{x\}) = N_S(B) \leq s \ .$$

Für $s \geq d(x) = r$ ist, nach Wahl von r, $N_s(B) < N_s(A)$, also

$$N_s(B \cup \{x\}) = N_s(B) + 1 \leq N_s(A) \leq s \ .$$

Aufgabe 16

8 Punkte

(a) Gegeben sind die Menge $E = \{a, b, c, d\}$ und die folgenden Mengen von Mengen:
$\mathcal{M}_1 = \{\, \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a, d\} \,\}$
$\mathcal{M}_2 = \{\, \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a, d\},\ \{a, e\} \,\}$
$\mathcal{M}_3 = \{\, \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a, c\},\ \{b, d\} \,\}$
$\mathcal{M}_4 = \{\, \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a, b, c\},\ \{b, c, d\},\ \{c, d, a\},\ \{d, a, b\} \,\}$

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ an, ob $(E, \mathcal{M}_i)$ ein Mengensystem, ein Unabhängigkeitssystem, ein Matroid ist. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in Form einer Tabelle mit Einträgen ja/nein, wobei jedes i eine Spalte und jede der drei Eigenschaften eine Zeile bekommt. (4 Punkte)

i	1	2	3	4
Mengensystem	ja	nein	ja	ja
Unabh.System	ja	nein	ja	nein
Matroid	nein	nein	nein	nein

(b) Geben Sie für die Fälle aus (a), in denen ein Mengensystem, aber kein Matroid vorliegt, eine Gewichtsfunktion an, bei der der kanonische Greedy-Algorithmus keine optimale Lösung findet. Die Gewichtsfunktion soll nur Werte in {1,2,3} annehmen. (4 Punkte)

i	$w(a)$	$w(b)$	$w(c)$	$w(d)$
1	2	3	1	2
3	3	3	1	2
4	1	1	1	1