Algorithmen und Datenstrukturen II

SoSe 2010, **2. Aufgabenblatt**, Abgabe 12.05.2010

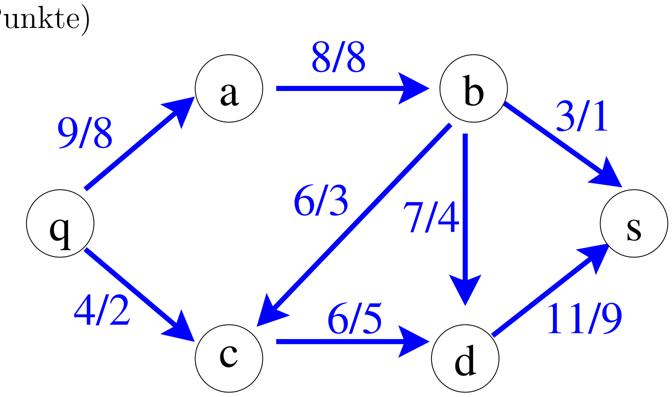
Aufgabe 4 9 Punkte

Ein Flussnetzwerk mit der Knotenmenge $\{q, a, b, c, d, s\}$ habe genau die folgenden Kanten.

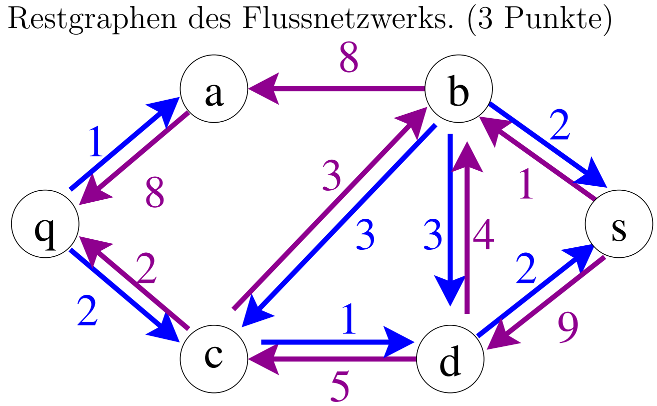
$$(q, a, 9, ?),\ (q, c, 4, ?),\ (c, d, 6, 5),\ (a, b, 8, ?),\ (b, c, 6, 3),\ (b, d, 7, 4),\ (b, s, 3, 1),\ (d, s, 11, ?)$$

Hierbei bedeutet ein 4-Tupel (v, w, κ, ϕ), dass die Kante (v, w) eine Kapazität κ besitzt, von der derzeit ϕ genutzt wird.

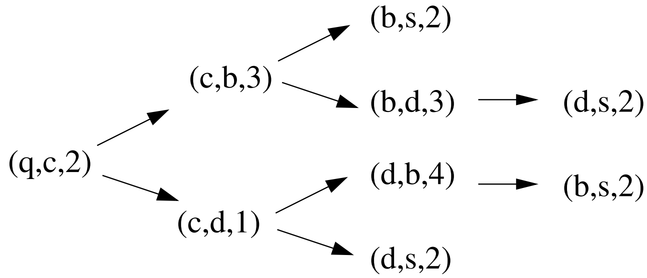
a) Errechnen Sie die fehlenden (durch ? ersetzten) ϕ-Werte, so dass sich ein gültiger Fluss ergibt. Zeichnen Sie das gegebene Flussnetzwerk und schreiben Sie an jede Kante die Werte ϕ, κ. (3 Punkte)



b) Zeichnen Sie den Restgraphen des Flussnetzwerks. (3 Punkte)



c) Geben Sie alle zunehmenden Wege und das jeweilige Minimum der verfügbaren Restkapazität an. (3 Punkte)

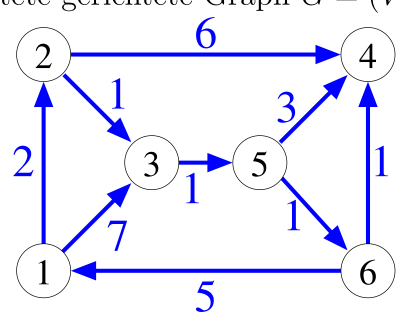


also (q,c,b,s,2)
(q,c,b,d,s,2)
(q,c,d,b,s,1)
(q,c,d,s,1)

Aufgabe 5

10 Punkte

Gegeben sei der folgende gewichtete gerichtete Graph $G = (V, E, w)$.



a) Benutzen Sie den Dijkstra-Algorithmus, um die Längen der kürzesten Pfade von Knoten 1 zu allen anderen Knoten zu berechnen. Geben Sie nach jeder Extraktion eines Knotens aus der Queue und nach Abschluss der Berechnung für alle Knoten $i \in \{1 \dots 6\}$ den aktuellen Wert $D[i]$ an. (5 Punkte)

$D(1,1)$	$D(1,2)$	$D(1,3)$	$D(1,4)$	$D(1,5)$	$D(1,6)$	v	Q
0	∞	∞	∞	∞	∞	1	2,3,4,5,6
0	2 (0+2)	7 (0+7)	∞	∞	∞	2	3,4,5,6
0	**2**	3 (2+1)	8 (2+6)	∞	∞	3	4,5,6
0	**2**	**3**	8	4 (3+1)	∞	5	4,6
0	**2**	**3**	7 (4+3)	**4**	5 (4+1)	6	4
0	**2**	**3**	6 (5+1)	**4**	**5**	4	
0	**2**	**3**	**6**	**4**	**5**		

b) Der Graph H entstehe aus G durch Hinzunahme der Kante $e = (3,6)$ mit dem Gewicht $w(e) = -4$. Benutzen Sie den Bellman-Ford-Algorithmus, um im Graphen H die Längen der kürzesten Pfade von Knoten 1 zu allen anderen zu berechnen. In der inneren Schleife werden die Kanten in lexikographischer Ordnung abgearbeitet, also $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, usw. Geben Sie jeweils nach Abarbeitung der inneren Schleife die aktuellen Werte $D[i]$ für alle Knoten $i \in \{1,\ldots,6\}$ an. (5 Punkte)

$E = ((1,2,2),(1,3,7),(2,3,1),(2,4,6),(3,5,1),(3,6,-4),(5,4,3),(5,6,1),(6,1,5),(6,4,1))$

Ausgabe	Kante	$D(1,1)$	$D(1,2)$	$D(1,3)$	$D(1,4)$	$D(1,5)$	$D(1,6)$
		0	∞	∞	∞	∞	∞
	(1,2,2)	0	2 (0+2)	∞	∞	∞	∞
	(1,3,7)	0	2	7 (0+7)	∞	∞	∞
	(2,3,1)	0	2	3 (2+1)	∞	∞	∞
	(2,4,6)	0	2	3	8 (2+6)	∞	∞
	(3,5,1)	0	2	3	8	4 (3+1)	∞
	(3,6,-4)	0	2	3	8	4	-1 (3-4)
	(5,4,3)	0	2	3	7 (4+3)	4	-1
	(5,6,1)	0	2	3	7	4	-1
	(6,1,5)	0	2	3	7	4	-1
	(6,4,1)	0	2	3	0 (-1+1)	4	-1
1.		0	2	3	0	4	-1
2.		0	2	3	0	4	-1
3.		0	2	3	0	4	-1
4.		0	2	3	0	4	-1
5.		0	2	3	0	4	-1

Aufgabe 6

11 Punkte

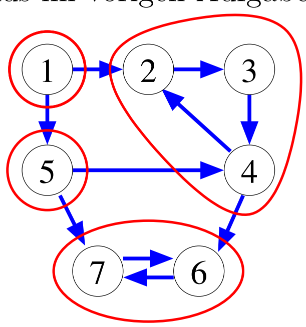
Der gerichtete Graph G sei durch die folgende Kantenliste definiert.

$$7, 10, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 2, 1, 5, 5, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 6, 5, 7$$

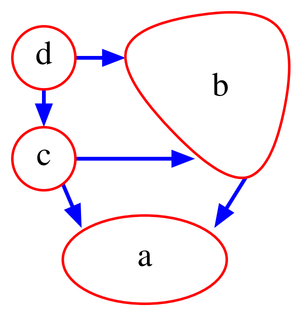
a) Benutzen Sie den Tarjan-Algorithmus beginnend beim Knoten 1, um die starken Zusammenhangskomponenten von G zu berechnen. In der Schleife innerhalb von `Tarjan-visit` werden die Kindsknoten u des aktuellen Knotens v in aufsteigender Reihenfolge der Indizes bearbeitet. Geben Sie jeweils nach Beendigung dieser Schleife `v`, `in[v]` und `l[v]` an, sowie ggf. die vom Programm erzeugte Ausgabe einer starken Zusammenhangskomponente. (5 Punkte)

`v`	`in[v]`	`l[v]`	Ausgabe
7	6	5	
6	5	5	st. Zshk: 7, 6
4	4	2	
3	3	2	
2	2	2	st. Zshk: 4, 3, 2
5	12	12	st. Zshk: 5
1	1	1	st. Zshk: 1

b) Zeichnen Sie G und dessen Komponentengraphen G^*. Benennen Sie dabei die starken Zusammenhangskomponenten von G mit $a, b, c, \ldots,$ in der Reihenfolge, in der sie vom Tarjan-Algorithmus im vorigen Aufgabenteil gefunden wurden. (2 Punkte)



G



G*

c) Geben Sie eine topologische Sortierung von G^* an. (1 Punkt) (d,c,b,a)

d) Wie viele Kanten enthält die transitive reflexive Hülle von G? Erklären Sie kurz, wie Sie durch Kenntnis von G^* diese Berechnung abkürzen können. (3 Punkte)

Berechne die transitive reflexive Hülle von G^*. Eine Kante (x, y) darin repräsentiert $|a| \times |b|$ Kanten in der Hülle von G selbst, wobei $|.|$ die Anzahl Knoten in der starken Zusammenhangskomponente bezeichnet. Zusammengefasst haben wir

$$|d| \times (|a| + |b| + |c| + |d|) \; + \; |c| \times (|a| + |b| + |c|) \; + \; |b| \times (|a| + |b|) \; + \; |a| \times |a|$$

Kanten, das sind

$$1 \times 7 + 1 \times 6 + 3 \times 5 + 2 \times 2 = 32$$