

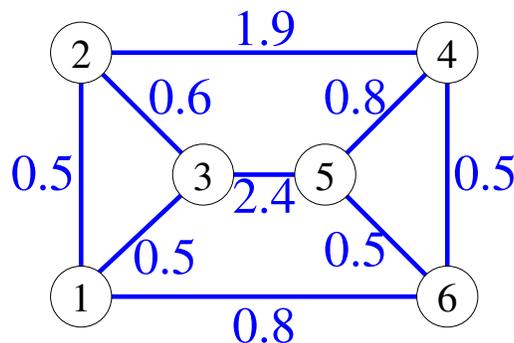
# Algorithmen und Datenstrukturen II

SoSe 2010, 1. Aufgabenblatt, Abgabe 28.04.2010

## Aufgabe 1

10 Punkte

Gegeben sei der folgende ungerichtete gewichtete Graph  $G$ .



- (a) Finden Sie einen minimalen Spannbaum von  $G$  mit dem Algorithmus von Kruskal. Schreiben Sie als Resultat die Kanten des Baums in der Reihenfolge hin, in der sie hinzugefügt werden. (4 Punkte)

$$Q = [\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{5, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 3\}, \{1, 6\}, \{4, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}]$$

$$F = [\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{5, 6\}, \{4, 6\}, \{1, 6\}]$$

- (b) Ist der in Aufgabenteil a gefundene minimale Spannbaum eindeutig? Falls nicht, wieviele minimale Spannbäume hat  $G$ ? (1 Punkt)

eindeutig

- (c) Von einem ungerichteten gewichteten zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E, w)$  sei nur die Anzahl der Knoten  $n = |V|$  und die Menge der benutzten Kantengewichte

$$B = \{w(e) | e \in E\}$$

bekannt. Geben Sie ein hinreichendes Kriterium dafür an, daß  $G$  einen eindeutigen minimalen Spannbaum hat. Das Kriterium soll außer  $B$  und  $n$  keine weitere Information über den Graphen verwenden. (2 Punkte)

Fehler in der Aufgabenstellung: Gemeint war, dass die Anzahl der Kanten  $m = |E|$  bekannt ist und (wie gegeben) die Gewichtsmenge  $B$ . Dann folgt aus  $|B| = m$ , dass der minimale Spannbaum eindeutig ist. Die reverse Implikation gilt nicht, der obige Graph ist ein Gegenbeispiel.

Will man die Aufgabe lösen wie gegeben, so kann man z.B. für den Spezialfall eines vollständigen Graphen doch noch ein hinreichendes Kriterium angeben: Ist  $|B| = n(n-1)/2$ , dann sind die Kantengewichte auch paarweise verschieden und deshalb der minimale Spannbaum eindeutig.

- (d) Der Algorithmus von Kruskal werde auf einen nicht-zusammenhängenden gewichteten Graphen  $G$  mit  $n$  Knoten angewendet und liefere eine Kantenmenge  $T$  mit  $r = |T|$  Kanten. Ist  $(V, T)$  ein Spannbaum von  $G$ ? Welche Information über  $G$  entnehmen Sie  $r$  und  $n$ ? (3 Punkte)

$(V, T)$  ist kein Spannbaum, da nicht zusammenhängend.  $n - r$  ist die Zahl der Zusammenhangskomponenten von  $G$

## Aufgabe 2

11 Punkte

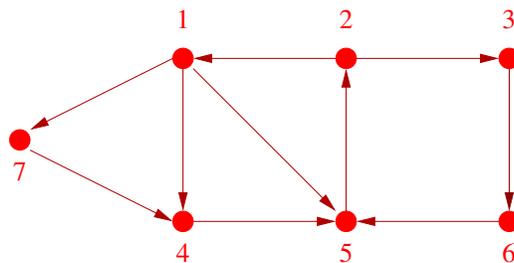
Der folgende gerichtete Graph sei durch seine Kantenliste gegeben:

7, 10, 1, 7, 1, 4, 1, 5, 2, 1, 2, 3, 3, 6, 6, 5, 4, 5, 5, 2, 7, 4

- (a) Geben Sie die Adjazenzmatrix des Graphen an. (3 Punkte)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Zeichnen Sie den Graphen. (2 Punkte)



- (c) Besitzt dieser Graph einen Hamiltonschen Zyklus? Falls ja: Geben Sie einen an. Falls nein: Begründen Sie dies möglichst kurz. (2 Punkte)

Nein, es gibt keinen Hamiltonschen Zyklus in diesem Graphen. Nehmen wir an, es gäbe einen Hamiltonschen Zyklus  $h$ . Der Vorgänger des Knotens 3 in  $h$  ist in jedem Falle der Knoten 2, denn anders wird 3 nicht erreicht. Direkt nach 3 besucht  $h$  den Knoten 6, dann 5 und dann 2. Der betrachtete Kreis ist also  $(2, 3, 6, 5)$  im Widerspruch zu der Annahme, dass wir es mit einem Hamiltonschen Kreis zu tun haben.

(d) Betrachten Sie die Knotenfolgen

$(2,1,5,2,1)$ ,  $(6,5,4,1)$ ,  $(2,1,5,6)$ ,  $(2,1,4,5,2)$

Geben Sie zu jeder Knotenfolge an, ob sie für den gegebenen Graphen

- eine Kantenfolge
- ein Kantenzug
- ein Pfad
- ein Zyklus

ist. (4 Punkte)

	$(2,1,5,2,1)$	$(6,5,4,1)$	$(2,1,5,6)$	$(2,1,4,5,2)$
Kantenfolge	ja	nein	nein	ja
Kantenzug	nein	nein	nein	ja
Pfad	nein	nein	nein	nein
Zyklus	nein	nein	nein	ja

### Aufgabe 3

9 Punkte

Führen Sie auf dem Graphen aus Aufgabe 2 folgende Traversierungen durch.

- (a) einen Breitendurchlauf beginnend bei Knoten 7
- (b) einen Breitendurchlauf beginnend bei Knoten 5
- (c) einen Tiefendurchlauf beginnend bei Knoten 5

Geben Sie die Knoten des Graphen in der Reihenfolge an, in der sie bearbeitet werden. Bei Mehrdeutigkeit wird der Knoten mit dem kleinsten Index zuerst bearbeitet.

- (a) 7 4 5 2 1 3 6
- (b) 5 2 1 3 4 7 6
- (c) 5 2 1 4 7 3 6 (Ordnung nach in-Zeiten)  
oder
- (c) 4 7 1 6 3 2 5 (Ordnung nach out-Zeiten)