ADS: Algorithmen und Datenstrukturen 2

Teil III

Peter F. Stadler & Konstantin Klemm

Bioinformatics Group, Dept. of Computer Science & Interdisciplinary Center for Bioinformatics, **University of Leipzig**

21. April 2010

Traversierung

Durchlaufen eines Graphen, bei dem jeder vom gewählten Startknoten erreichbare Knoten (bzw. jede Kante) genau 1-mal aufgesucht wird. Jeweils nächster besuchter Knoten hat mindestens einen Nachbarn in der zuvor besuchten Knotenmenge.

Generische Lösungsmöglichkeit für Graphen $G = (V, E)$:

```
FOREACH v in V DO {markiere v als unbearbeitet};
B={s}; // Menge besuchter Knoten, anfangs = Startknoten s
markiere s als bearbeitet;
WHILE es gibt unbearbeiteten Knoten v'
  mit (v,v') in E und v in B
  { B = B + {v'}; markiere v';}
```

Realisierungen unterscheiden sich bezüglich Verwaltung der noch abzuarbeitenden Knotenmenge und Auswahl der jeweils nächsten Kante.

Breiten- und Tiefendurchlauf

Breitendurchlauf (Breadth First Search, BFS)

- ausgehend von Startknoten werden zunächst alle direkt erreichbaren Knoten bearbeitet
- danach die über mindestens zwei Kanten vom Startknoten erreichbaren Knoten, dann die über drei Kanten usw.
- es werden also erst die Nachbarn besucht, bevor zu den Söhnen gegangen wird.
- kann mit FIFO-Datenstruktur für noch zu bearbeitende Knoten realisiert werden.

Tiefendurchlauf (Depth First Search, DFS)

- ausgehend von Startknoten werden zunächst rekursiv alle Söhne (Nachfolger) bearbeitet; erst dann wird zu den Nachbarn gegangen
- kann mit Stack-Datenstruktur für noch zu bearbeitende Knoten realisiert werden
- Verallgemeinerung der Traversierung von Bäumen.

Breitensuche (BFS)

Bearbeite einen Knoten, der in n Schritten von u erreichbar ist, erst wenn alle Knoten abgearbeitet wurden, die in $n-1$ Schritten erreichbar sind.

- gerichteter Graph $G = (V, E)$; Startknoten s; Q sei FIFO-Warteschlange.
- zu jedem Knoten u werden der aktuelle Farbwert und der Vorgänger $p[u]$, von dem aus u erreicht wurde, gespeichert.
- p-Werte liefern nach Abarbeitung für zusammenhängende Graphen einen Spannbaum.

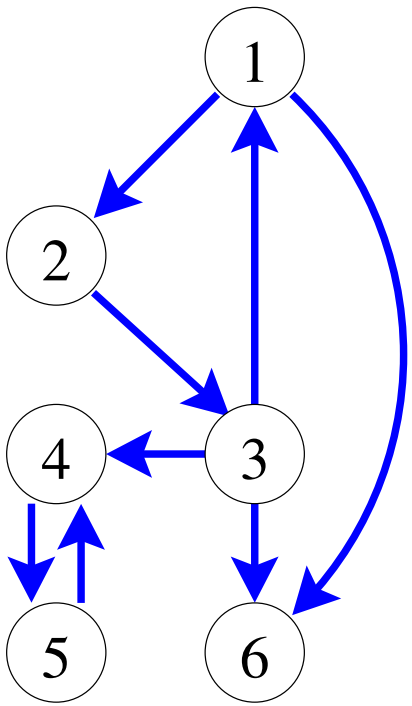
Breitensuche: Algorithmus

```
BFS(G,s)
  FOREACH v in V DO {farbe(v)=weiss; p[v]=null; }
  farbe[s]=grau; INIT(Q); Q=enqueue(Q,s);
  WHILE NOT (EMPTY(Q)) DO
  {
    v=FRONT(Q);
    FOREACH u in succ(v) DO
    {
      If farbe[u]=weiss THEN
      { farbe[u]=grau; p[u]=v; Q=DEQUEUE(Q,u);}
      DEQUEUE(Q); farbe[v]=schwarz;
    }
  }
```

Farben:
weiss=unbearbeitet, grau=in Bearbeitung, schwarz=bearbeitet

Breitensuche: Beispiel

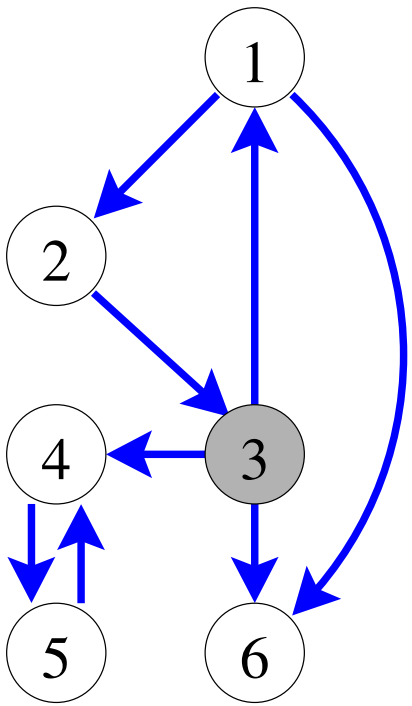
Startknoten $s = 3$



$Q = []$

Breitensuche: Beispiel

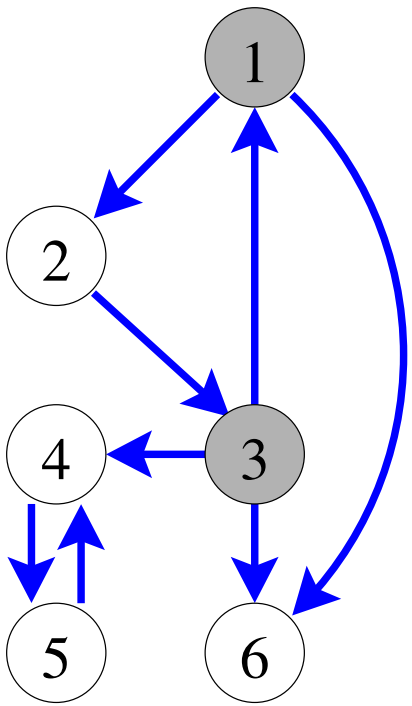
Startknoten $s = 3$



$Q = [3]$

Breitensuche: Beispiel

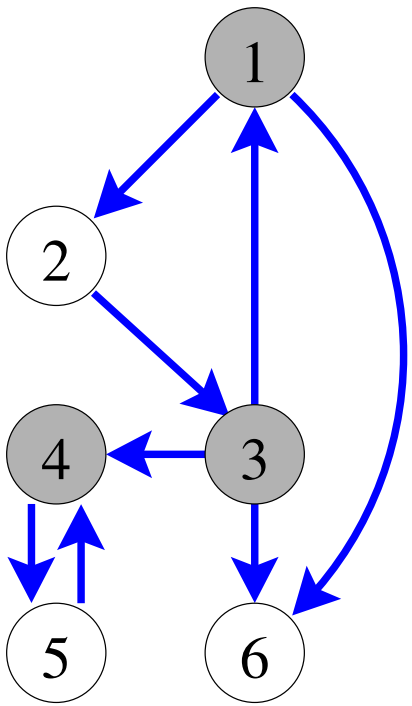
Startknoten $s = 3$



$Q = [3, 1]$

Breitensuche: Beispiel

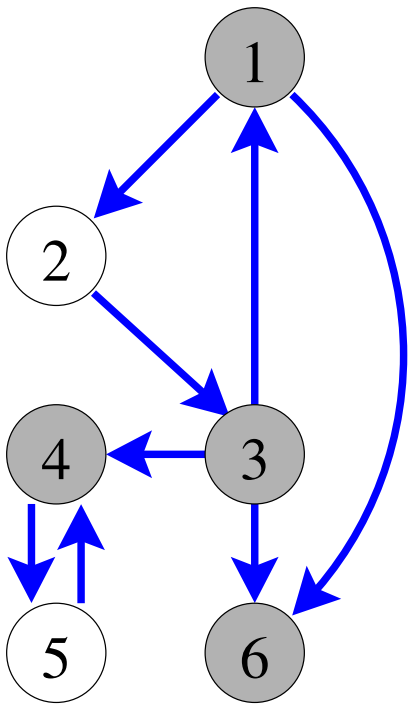
Startknoten $s = 3$



$Q = [3, 1, 4]$

Breitensuche: Beispiel

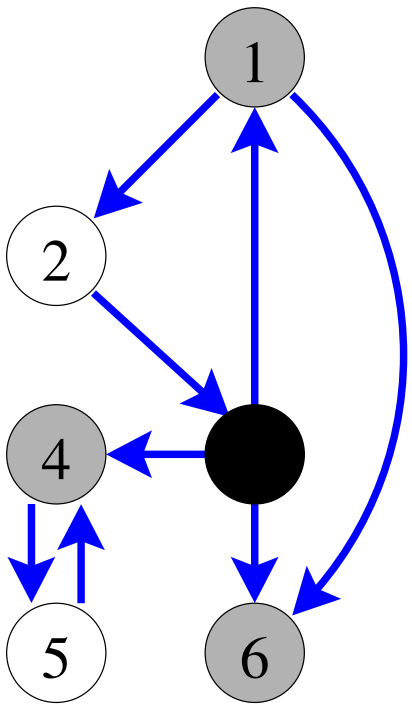
Startknoten $s = 3$



$Q = [3, 1, 4, 6]$

Breitensuche: Beispiel

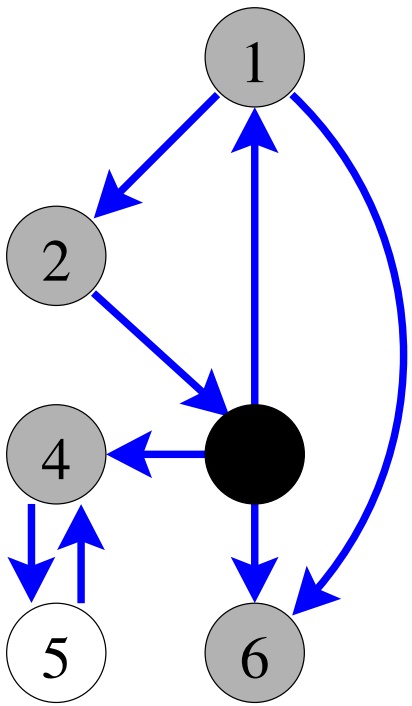
Startknoten $s = 3$



$Q = [1, 4, 6]$

Breitensuche: Beispiel

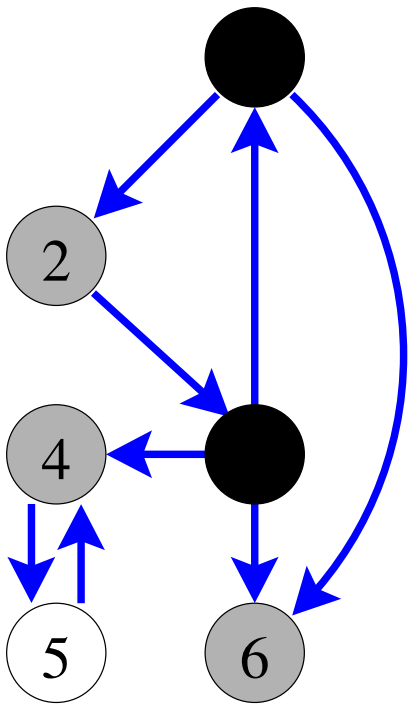
Startknoten $s = 3$



$Q = [1, 4, 6, 2]$

Breitensuche: Beispiel

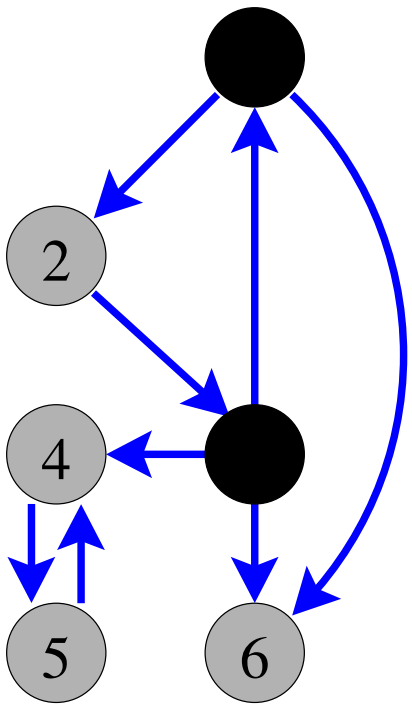
Startknoten $s = 3$



$Q = [4, 6, 2]$

Breitensuche: Beispiel

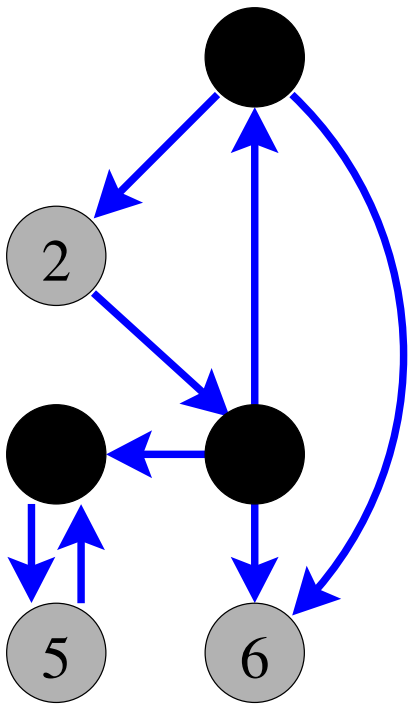
Startknoten $s = 3$



$Q = [4, 6, 2, 5]$

Breitensuche: Beispiel

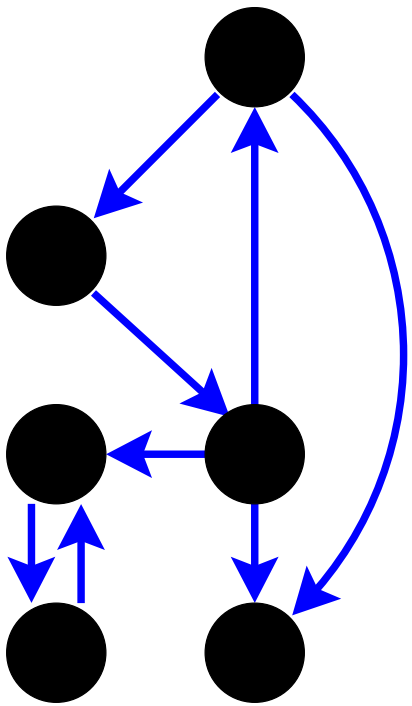
Startknoten $s = 3$



$Q = [6, 2, 5]$

Breitensuche: Beispiel

Startknoten $s = 3$



$Q = []$

Tiefensuche (DFS)

- Bearbeite einen Knoten v erst dann, wenn alle seine Söhne bearbeitet sind (außer wenn ein Sohn auf dem Weg zu v liegt)
- gerichteter Graph $G = (V, E)$;
- zu jedem Knoten v werden gespeichert: der aktuelle Farbwert `farbe[v]`, die Zeitpunkte `in[v]` und `out[v]`, zu denen der Knoten im Rahmen der Tiefensuche erreicht bzw. verlassen wurde und der Vorgänger `p[v]`, von dem aus v erreicht wurde
- die `in`- bzw. `out`-Zeitpunkte ergeben eine Reihenfolge der Knoten analog zur Vor- bzw. Nachordnung bei Bäumen.

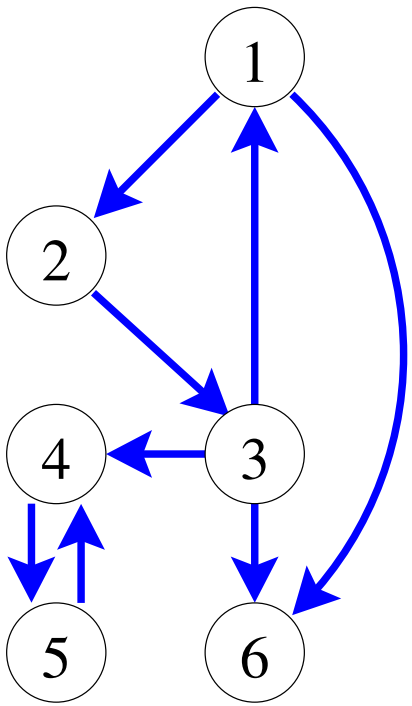
Tiefensuche: Algorithmus

```
DFS(G)
FOR EACH v in V do { farbe[v]=weiss; p[v]=null; }
zeit=0
for each v in V do {if farbe[v]=weiss then DFS-visit[v]}

DFS-visit(G,v) // rekursive Methode zur Tiefensuche
farbe[v]=grau; zeit=zeit+1; in[v]=zeit;
FOR EACH u in succ(v) DO
{ IF farbe[u]=weiss THEN { p[u]=v; DFS-visit[u];}}
farbe[v]=schwarz; zeit=zeit+1; out[v]=zeit;
```

Tiefensuche: Beispiel

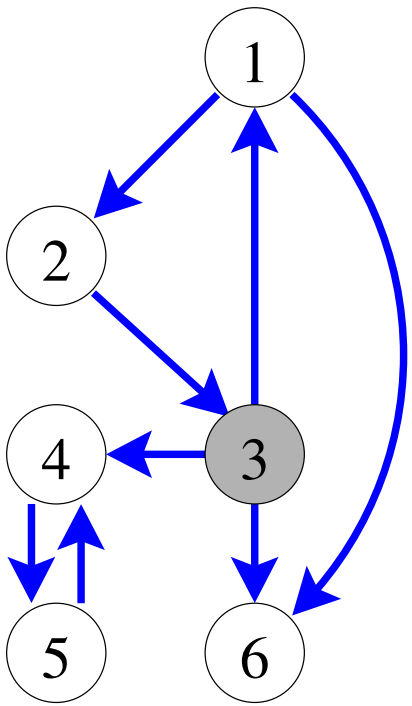
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

Tiefensuche: Beispiel

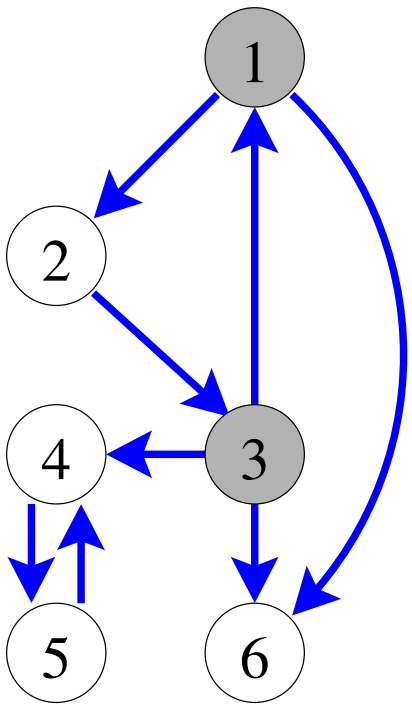
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

Tiefensuche: Beispiel

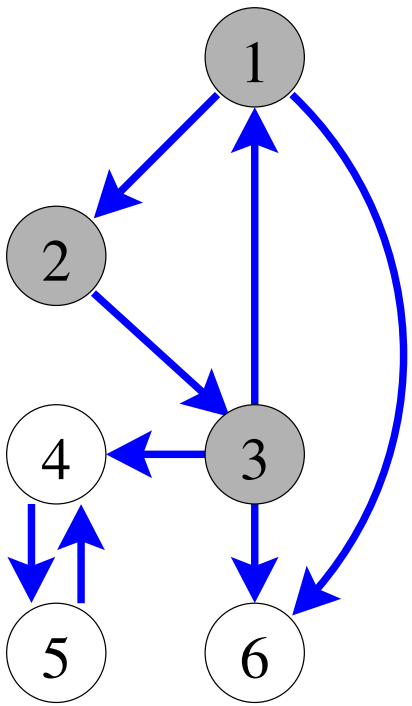
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

Tiefensuche: Beispiel

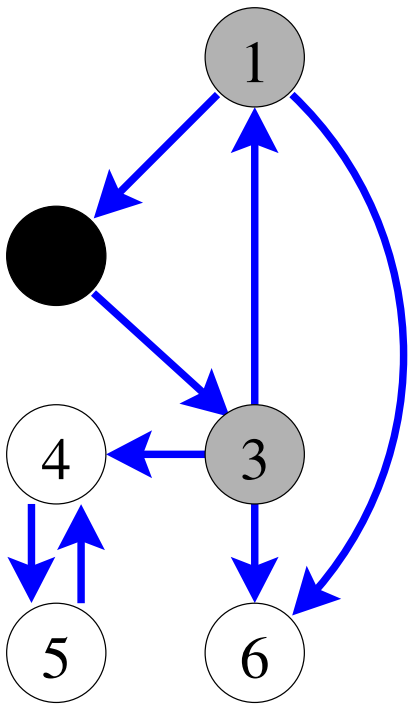
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

Tiefensuche: Beispiel

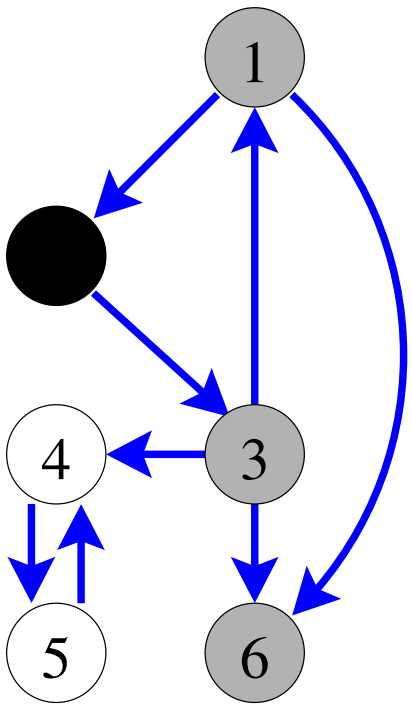
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

Tiefensuche: Beispiel

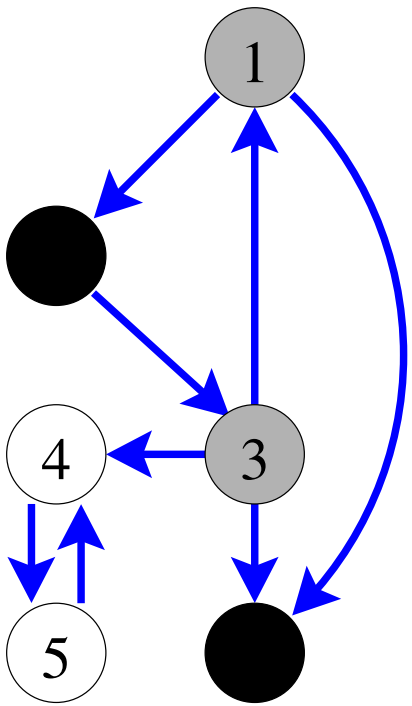
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

Tiefensuche: Beispiel

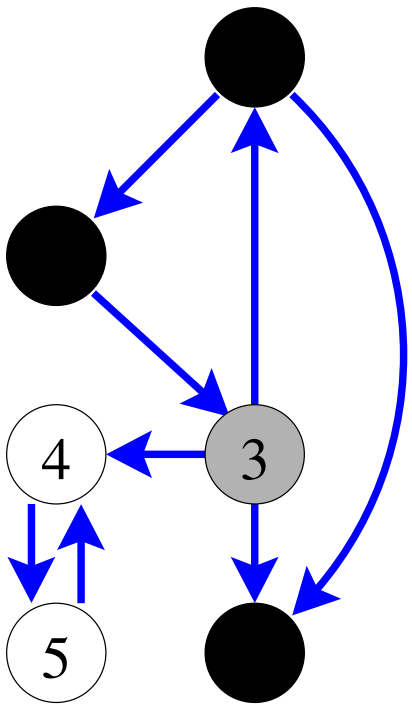
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

Tiefensuche: Beispiel

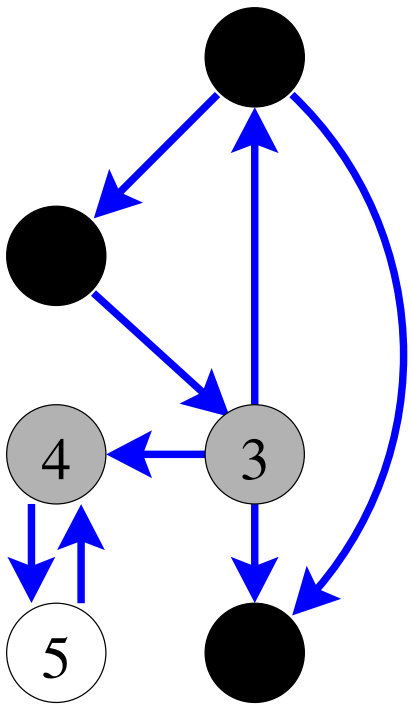
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

Tiefensuche: Beispiel

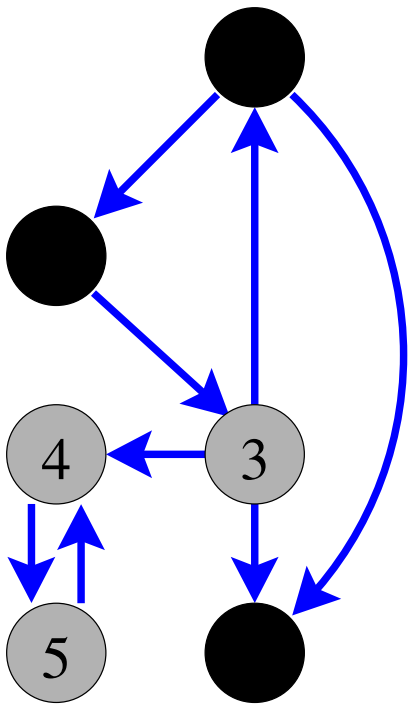
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

Tiefensuche: Beispiel

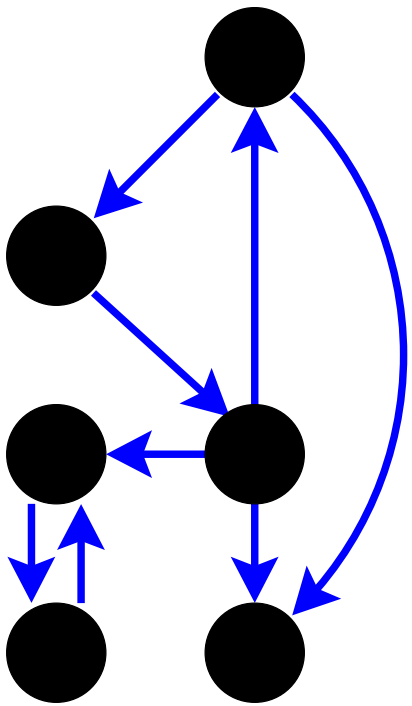
Startknoten $s = 3$



v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

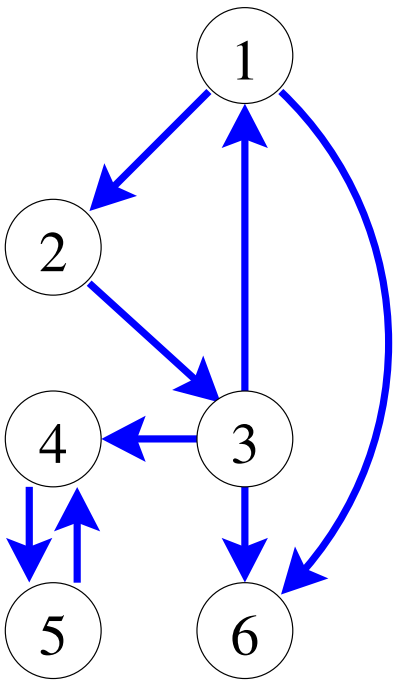
Tiefensuche: Beispiel

Startknoten $s = 3$

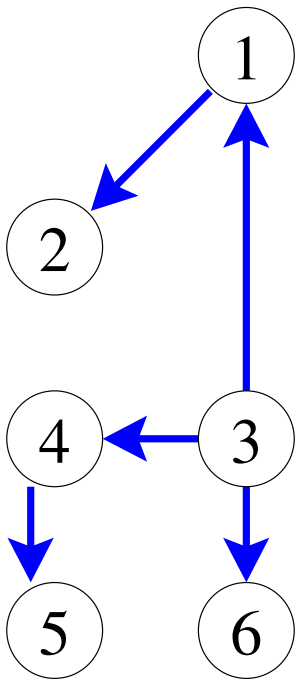


v	in[v]	out[v]
1	2	7
2	3	4
3	1	12
4	8	11
5	9	10
6	5	6

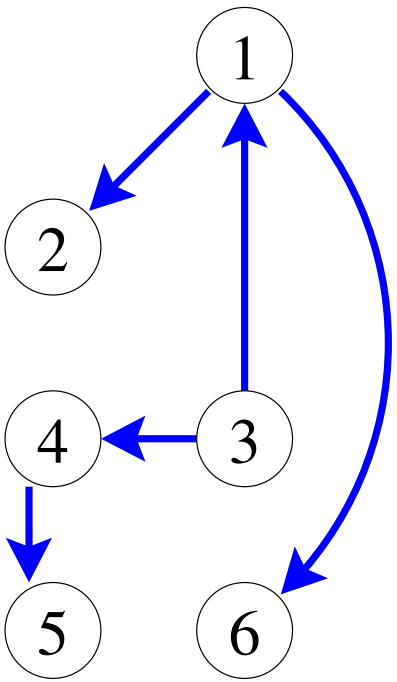
Bäume aus Breiten- und Tiefensuche



Graph G



BFS-Baum

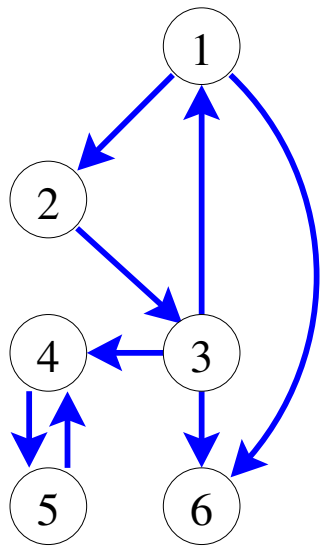


DFS-Baum

Starke Zusammenhangskomponenten

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *stark zusammenhängend*, wenn für alle $u, v \in V$ gilt: Es gibt einen Pfad von u nach v.

Eine *starke Zusammenhangskomponente* von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G.

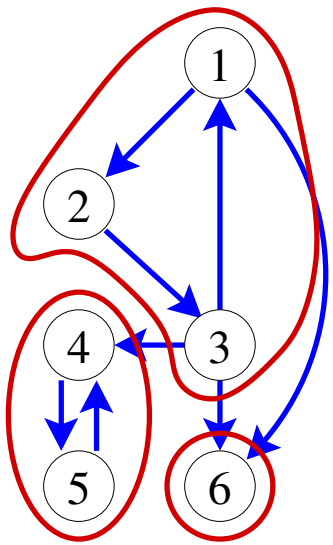


Jeder Knoten eines Graphen ist in genau einer starken Zusammenhangskomponente enthalten. Wieso?

Starke Zusammenhangskomponenten

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *stark zusammenhängend*, wenn für alle $u, v \in V$ gilt: Es gibt einen Pfad von u nach v.

Eine *starke Zusammenhangskomponente* von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G.



Jeder Knoten eines Graphen ist in genau einer starken Zusammenhangskomponente enthalten. Wieso?

gegenseitige Erreichbarkeit = Äquivalenzrelation

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Sind Knoten $u, v \in V$ gegenseitig erreichbar, schreiben wir $u \sim v$. Die so definierte Relation $\sim$ auf V ist eine Äquivalenzrelation also

- symmetrisch
- transitiv und
- reflexiv

Die Knotenmengen der starken Zusammenhangskomponenten von G sind die Äquivalenzklassen von $\sim$.

Starke Zsh-Komponenten durch Tiefensuche

- Führe Tiefensuche (DFS) auf G aus.
- Für jeden Knoten `v` berechne dabei `l[v]` = "frühester" Knoten, der von v erreichbar ist in der durch `in[]` gegebenen Reihenfolge.
- Wenn alle Kindsknoten von `v` abgearbeitet sind und `l[v]=in[v]`, ist `v` die "Wurzel" einer starken Zusammenhangskomponente. Deren Knoten werden dann gleich ausgegeben und nicht mehr weiter betrachtet (denn jeder Knoten ist in nur einer Komponente).

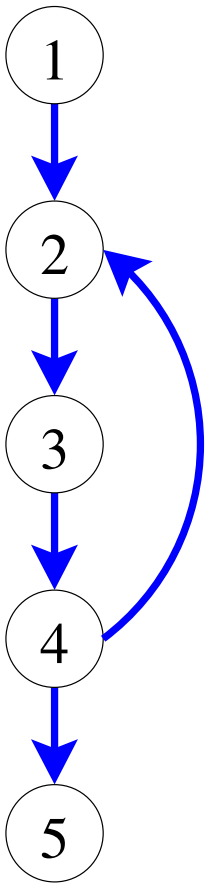
Algorithmus von Tarjan (1972)

```
Tarjan-visit(G,v)
farbe[v]=grau; zeit=zeit+1; in[v]=zeit; l[v]=zeit;
PUSH(S,v)
FOR EACH u in succ(v) DO {
  IF farbe[u]=weiss THEN
  { Tarjan-visit[u]; l[v]=min(l[v],l[u]) ;}
  ELSEIF u in S THEN l[v]=min(l[v],in[u]);
}

IF (l[v]=in[v]) {
  Ausgabe("starke ZshK":)
  DO  { u=TOP(S); Ausgabe(u); POP(S); }
  UNTIL u=v;
}

farbe[v]=schwarz; zeit=zeit+1;
```

Tarjan: Beispiel



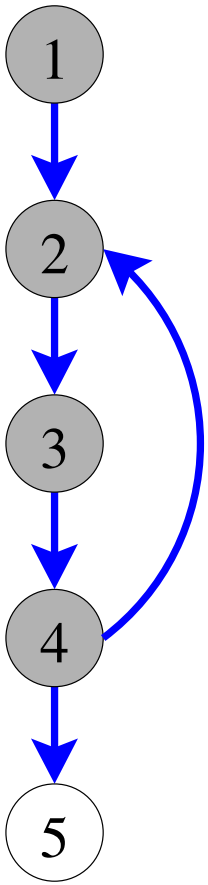
v	in[v]	l[v]
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	2
5	5	

Zshk: 5

Zshk: 2,3,4

Zshk: 1

Tarjan: Beispiel



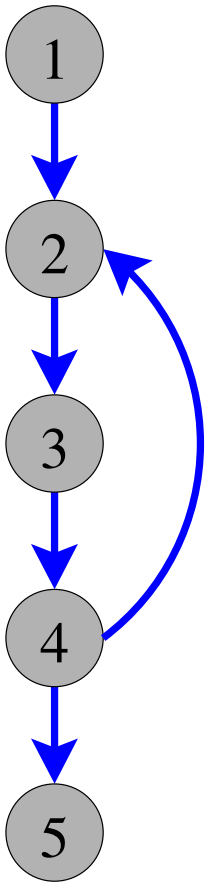
v	in[v]	l[v]
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	2
5	5	

Zshk: 5

Zshk: 2,3,4

Zshk: 1

Tarjan: Beispiel



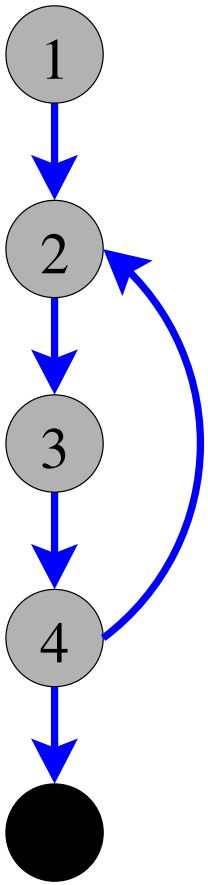
v	in[v]	l[v]
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	2
5	5	5

Zshk: 5

Zshk: 2,3,4

Zshk: 1

Tarjan: Beispiel



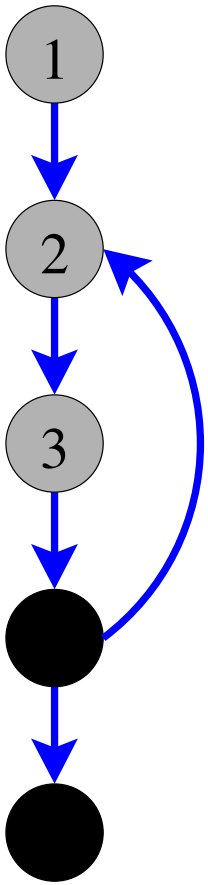
v	in[v]	l[v]
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	2
5	5	5

Zshk: 5

Zshk: 2,3,4

Zshk: 1

Tarjan: Beispiel



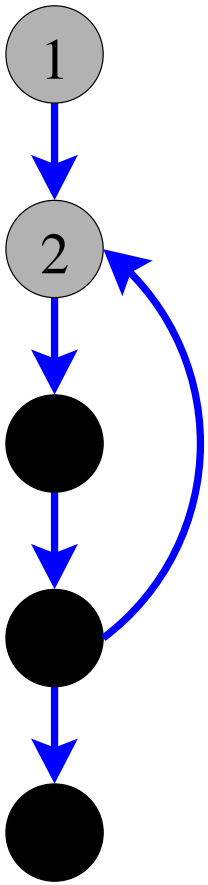
v	in[v]	l[v]
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	2
5	5	5

Zshk: 5

Zshk: 2,3,4

Zshk: 1

Tarjan: Beispiel



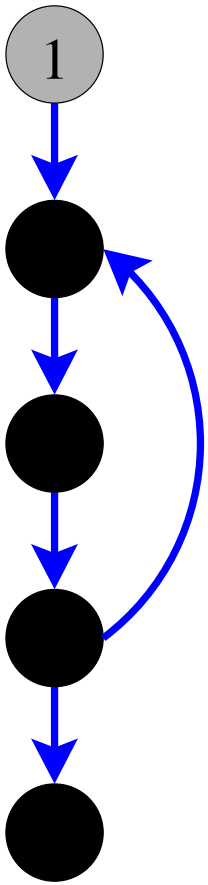
v	in[v]	l[v]
1	1	1
2	2	2
3	3	2
4	4	2
5	5	5

Zshk: 5

Zshk: 2,3,4

Zshk: 1

Tarjan: Beispiel



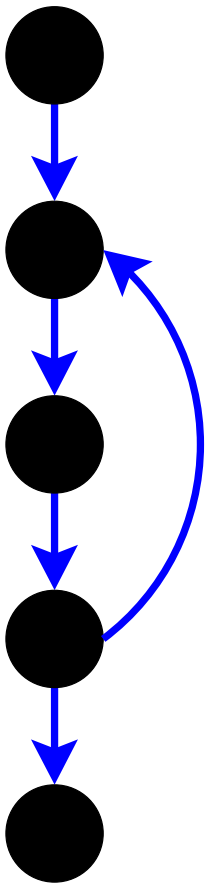
v	in[v]	l[v]
1	1	1
2	2	2
3	3	2
4	4	2
5	5	5

Zshk: 5

Zshk: 2,3,4

Zshk: 1

Tarjan: Beispiel



v	in[v]	l[v]
1	1	1
2	2	2
3	3	2
4	4	2
5	5	5

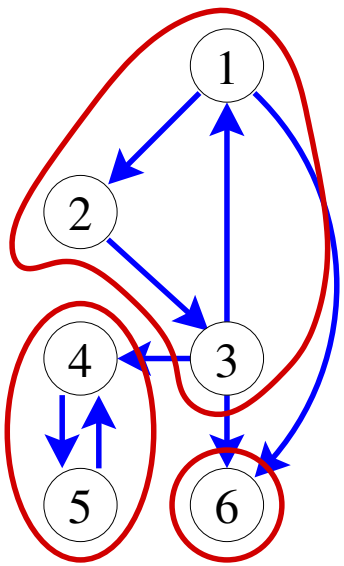
Zshk: 5

Zshk: 2,3,4

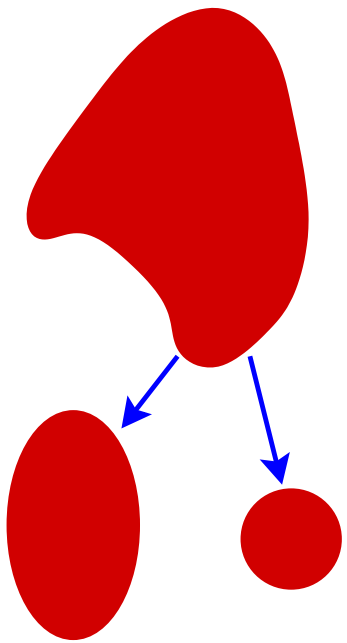
Zshk: 1

Komponentengraph G^*

Fasse alle Knoten jeweils einer starken Zusammenhangskomponente zu einem einzigen Knoten zusammen.
Kante von Komponente A nach Komponente B, wenn es $u \in A$ und $v \in B$ gibt, so daß (u, v) eine Kante in G ist.



Graph G



Komponentengraph G^*

Erlaubt z.B. schnellere Berechnung der transitiven Hülle von G.