Algorithmen und Datenstrukturen 2

Sommersemester 2007
8. Vorlesung

Peter Stadler

Universität Leipzig
Institut für Informatik
studla@bioinf.uni-leipzig.de

Suche in Texten

Einführung
Suche in dynamischen Texten (ohne Indexierung)
- Naiver Algorithmus (Brute Force)
- Knuth-Morris-Pratt (KMP) - Algorithmus
- Boyer-Moore (BM) - Algorithmus
- Signaturen

Suche in (weitgehend) statischen Texten -> Indexierung
- Suffix-Bäume
- Invertierte Listen
- Signatur-Dateien

Approximative Suche
- k-Mismatch-Problem
- Editierdistanz
- Berechnung der Editierdistanz

Einführung

Problem: Suche eines Teilwortes/Musters/Sequenz in einem Text

- String Matching
- Pattern Matching
- Sequence Matching

Häufig benötigte Funktion

- Suchen und Ersetzen in Textverarbeitung
- Durchsuchen von Web-Seiten
- Durchsuchen von Dateisammlungen etc.
- Suchen von Mustern in DNA-Sequenzen (begrenztes Alphabet: A, C, G, T)

Dynamische vs. statische Texte

- dynamische Texte (z.B. im Texteditor): aufwendige Vorverarbeitung / Indizierung i.a. nicht sinnvoll
- relativ statische Texte: Erstellung von Indexstrukturen zur Suchbeschleunigung

Suche nach beliebigen Strings/Zeichenketten vs. Wörtern/Begriffen

Exakte Suche vs. approximative Suche (Ähnlichkeitssuche)

Genauere Aufgabenstellung für die exakte Suche

- Gegeben: Zeichenkette text[1..n] aus einem endlichen Alphabet Σ,
  Muster (Pattern) pat[1..m] mit pat[i]∈Σ, m <= n
- *Fenster* w_i ist eine Teilzeichenkette von text der Länge m, die an Position i beginnt, also text[i] bis text[i+m-1]
- Ein Fenster w_i, das mit dem Muster p übereinstimmt, heißt *Vorkommen* des Musters an Position i. w_i ist Vorkommen:

text [i] = pat [1], text[i+1]=pat[2], ..., text[i+m-1]=pat[m]

- Ein *Mismatch* in einem Fenster w_i ist eine Position j, an der das Muster mit dem Fenster nicht übereinstimmt
- Gesucht: ein oder alle Positionen von Vorkommen des Pattern pat im Text

Beispiele

```
Position: 12345678...                  12345678...
Text:     dieser testtext ist ...      aaabaabacabca
Muster:   test                         aaba
```

Maß der Effizienz: Anzahl der (Zeichen-) Vergleiche zwischen Muster und Text

Naiver Algorithmus (Brute Force)

Brute Force-Lösung 1

- Rückgabe der ersten Position i an der Muster vorkommt bzw. -1 falls kein Vorkommen

```
FOR i=1 to n -m+1 DO BEGIN
   found := true;
   FOR j=1 to m DO IF text[i] ≠ pat [j] THEN found := false; { Mismatch }
   IF found THEN RETURN i;
END;
RETURN -1;
```

- Komplexität O(

Brute Force-Lösung 2

- Abbrechen der Prüfung einer Textposition i bei erstem Mismatch mit dem Muster

```
FOR i=1 to n -m+1 DO BEGIN
   j := 1;
   WHILE j <= m AND pat[j] = text[i+j-1] DO j := j+1 END;
   IF j = m+1 THEN RETURN i;
END
RETURN -1;
```

- Aufwand oft n
- Worst Case-Aufwand weiterhin O(n*m)

Naiver Algorithmus: Beispiel

```
Text:    der erste testtext ist kurz
Muster:  test
          test
           test
            test
             test
              test
               test
                test
                 test
                  test
                   test
```

Verschiedene bessere Algorithmen

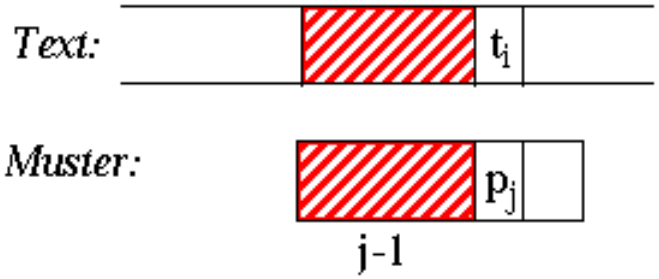
- Nutzung der Musterstruktur, Kenntnis der im Muster vorkommenden Zeichen
- Knuth-Morris-Pratt (1974): nutze bereits geprüfter Musteranfang um ggf. Muster um mehr als eine Stelle nach rechts zu verschieben
- Boyer-Moore (1976): Teste Muster von hinten nach vorne

Knuth-Morris-Pratt (KMP) I

Idee: nutze bereits gelesene Information bei einem Mismatch

- verschiebe ggf. Muster um mehr als 1 Position nach rechts
- gehe im Text nie zurück!

Allgemeiner Zusammenhang



- Mismatch an Textposition i mit j-tem Zeichen im Muster
- j-1 vorhergehende Zeichen stimmen überein
- mit welchem Zeichen im Muster kann nun das i-te Textzeichen verglichen werden, so dass kein Vorkommen des Musters übersehen wird?

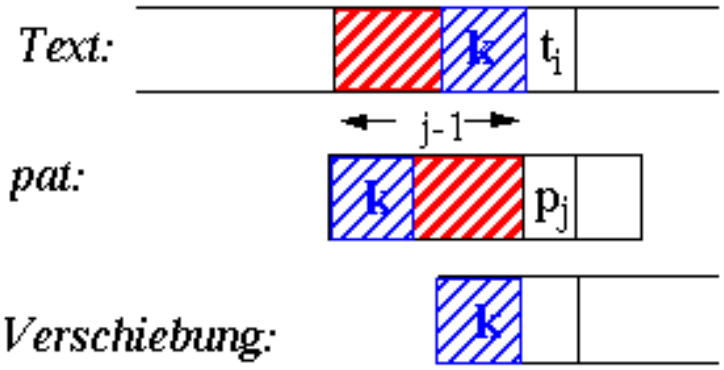
Beispiele

```
Text:    DATENSTRUKTUREN      GEGEBENENFALLS
Muster:  DATUM                GEGEN
```

Knuth-Morris-Pratt (KMP) II

Beobachtungen

- wesentlich ist das längste Präfix des Musters (Länge k<j-1), das Suffix des übereinstimmenden Bereiches ist, d.h. gleich pat [j-k-1.. j-1] ist
- dann ist Position k+1 = next (j) im Muster, die nächste Stelle, die mit Textzeichen t_i zu vergleichen ist (entspricht Verschiebung des Musters um j-k-1 Positionen)
- für k=0 kann Muster um j-1 Positionen verschoben werden



Hilfstabelle next spezifiziert die nächste zu prüfende Position des Musters

- next [j] gibt für Mismatch an Postion j > 1, die als nächstes zu prüfende Musterposition an
- next[j] = 1 + k (=Länge des längsten echten Suffixes von pat[1..j-1], das Präfix von pat ist)
- next [1]=0
- next kann ausschließlich auf dem Muster selbst (vorab) bestimmt werden

Beispiel zur Bestimmung der Verschiebetabelle next

j	1	2	3	4	5
Muster:	A	B	A	B	C

next[j]:

KMP: Algorithmus

KMP-Suchalgorithmus (setzt voraus, dass next-Tabelle erstellt wurde)

```
j:=1; i:=1;
WHILE (i <= n) DO BEGIN
        IF pat[j]= text[i] DO  BEGIN    IF j=m RETURN i-m+1; // Match
                                        j := j+1; i := i+1;
                               END
        ELSE                   IF j>1 THEN j := next [j]
                               ELSE i := i+1;
END
RETURN -1; // Mismatch
```

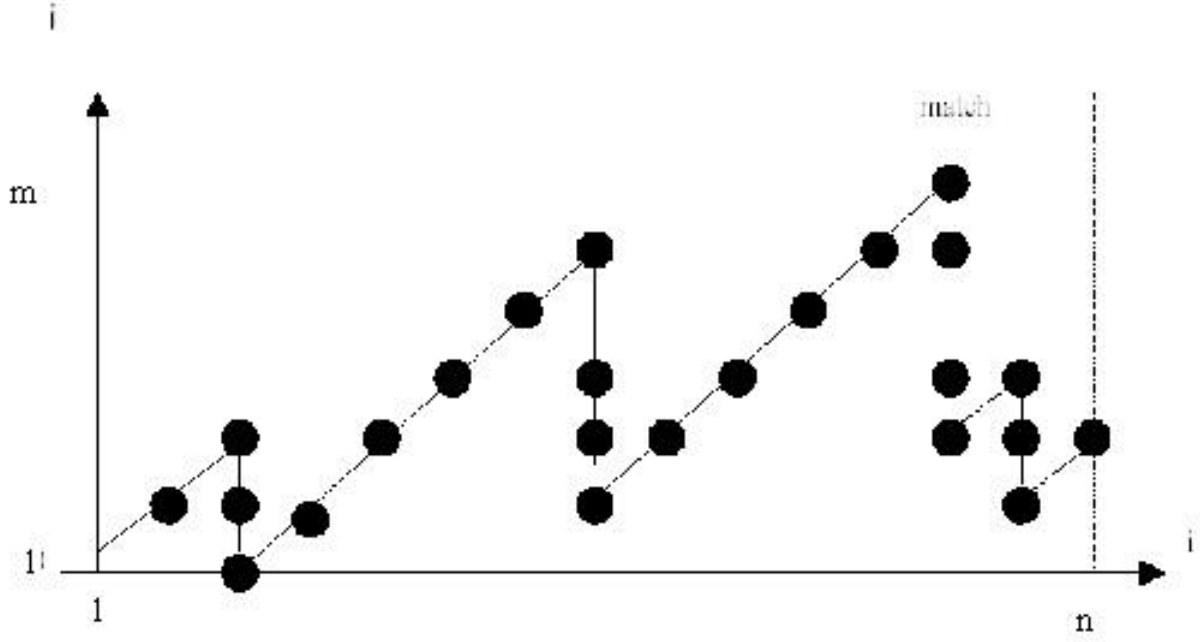
Beispiel

```
Text:     ABCAABABAABABC
Muster:   ABABC
```

```
 j        12345
Muster:   ABABC
next[j]:
```

KMP Verlauf

Verlauf von i und j bei KMP-Stringsuche



Lineare Worst-Case-Komplexität O(n+m)

- Suchverfahren selbst O(n)
- Vorberechnung der next-Tabelle O(m)

Vorteilhaft v.a. bei Wiederholung von Teilmustern

Boyer-Moore

Auswertung des Musters von rechts nach links, um bei Mismatch Muster möglichst weit verschieben zu können

Nutzung von im Suchmuster vorhandenen Informationen, insbesondere vorkommenden Zeichen und Suffixen

Vorkommens-Heuristik ("bad character heuristic")

- Textposition i wird mit Muster von hinten beginnend verglichen; Mismatch an Muster-Position j für Textsymbol t
- wenn t im Muster nicht vorkommt (v.a. bei kurzen Mustern sehr wahrscheinlich), kann Muster hinter t geschoben, also um j Positionen
- wenn t vorkommt, kann Muster um einen Betrag verschoben werden, der der Position des letzten Vorkommens des Symbols im Suchmuster entspricht
- Verschiebeumfang kann für jeden Buchstaben des Alphabets vorab auf Muster bestimmt und in einer Tabelle vermerkt werden

Boyer-Moore: Algorithmus

Beispiel: Text: `DATENSTRUKTUREN UND ALGORITHMEN ...`
Muster: `DATUM DATUM`

Vorberechnung einer Hilfstabelle last

- für jedes Symbol des Alphabets wird die Position seines letzten Vorkommens im Muster angegeben
- -1, falls das Symbol nicht im Muster vorkommt
- für Mismatch an Musterposition j, verschiebt sich der Anfang des Musters um j - last [t] +1 Positionen

Algorithmus

```
i:=1;
WHILE (i <= n-m) DO BEGIN
        j := m;
        WHILE j >= 1 AND pat[j]= text[i+j-1] DO j := j-1;
        IF j < 1        RETURN i;           // Match
        ELSE            i := (i+j-1) - last [text[i+j-1]];
END;
RETURN -1; // Mismatch
```

Komplexität:

- für große Alphabete / kleine Muster wird meist O (n/m) erreicht, d.h zumeist ist nur jedes m-te Zeichen zu inspizieren
- Worst-Case jedoch O (n*m)

Boyer-Moore: Beispiel

Text: `PETER PIPER PICKED A PECK`
Muster: `PECK`

Last-Tabelle:

A:	N:
B:	O:
C:	P:
D:	...
E:	
...	
J:	Y:
K:	Z:
...	...

Boyer-Moore: Verbesserungen

Match-Heuristik ("good suffix heuristic")

- Suffix s des Musters stimmt mit Text überein
- Fall 1: falls s nicht noch einmal im Muster vorkommt, kann Muster um m Positionen weitergeschoben werden
- Fall 2: es gibt ein weiteres Vorkommen von s im Muster: Muster kann verschoben werden, bis dieses Vorkommen auf den entsprechenden Textteil zu s ausgerichtet ist
- Fall 3: Präfix des Musters stimmt mit Endteil von s überein: Verschiebung des Musters bis übereinstimmende Teile übereinander liegen

```
Text:    CBABBCBBCABA...
Muster:  ABBABC
```

```
CBABBCBBCABA...
ABCCBC
```

```
Text:    BAABBCABCABA...
Muster:  CBAABC
```

Lineare Worst-Case-Komplexität O (n+m)

Signaturen I

Indirekte Suche über Hash-Funktion

- Berechnung einer Signatur s für das Muster, z.B. über Hash-Funktion
- für jedes Textfenster an Position i (Länge m) wird ebenfalls eine Signatur s_i berechnet
- Falls $s_i = s$ liegt ein potentieller Match vor, der näher zu prüfen ist
- zeichenweiser Vergleich zwischen Muster und Text wird weitgehend vermieden

Pessimistische Philosophie

- "Suchen" bedeutet "Versuchen, etwas zu finden". Optimistische Ansätze erwarten Vorkommen und führen daher viele Vergleiche durch, um Muster zu finden
- Pessimistische Ansätze nehmen an, dass Muster meist nicht vorkommt. Es wird versucht, viele Stellen im Text schnell auszuschließen und nur an wenigen Stellen genauer zu prüfen
- Neben Signatur-Ansätzen fallen u.a. auch Verfahren, die zunächst Vorhandensein seltener Zeichen prüfen, in diese Kategorie

Signaturen II

Kosten O(n) falls Signaturen effizient bestimmt werden können

- inkrementelle Berechnung von s_i aus s_i-1
- unterschiedliche Vorschläge mit konstantem Berechnungsaufwand pro Fenster

Beispiel: Ziffernalphabet; Quersumme als Signaturfunktion

Text: 7 6 2 1 3 0 8 7 2 5 0 8 . . .
-1 6-

Muster: 1 3 0 8

Signatur: 1+3+0+8=12

- inkrementelle Berechenbarkeit der Quersumme eines neuen Fensters (Subtraktion der herausfallenden Ziffer, Addition der neuen Ziffer)
- jedoch hohe Wahrscheinlichkeit von Kollisionen (false matches)

Karp-Rabin

Alternative Signaturfunktion

- Abbildung des Musters / Fensters in Dezimalzahl von max. 9 Stellen (mit 32 Bits repräsentierbar)

- Signatur des Musters: $s(p_1, \ldots p_m) = \sum_{j=1..m} (10^{j-1} \cdot p_{m+1-j}) \bmod 10^9$

- Signatur s_{i+1} des neuen Fensters $(t_{i+1} \ldots t_{i+m})$ abgeleitet aus Signatur s_i des vorherigen Fensters $(t_i \ldots t_{i+m-1})$:

$$s_{i+1} = ((s_i - t_i \cdot 10^{m-1}) \cdot 10 + t_{i+m}) \bmod 10^9$$

- Signaturfunktion ist auch für größere Alphabete anwendbar

Statische Suchverfahren

Annahme: weitgehend statische Texte / Dokumente

- derselbe Text wird häufig für unterschiedliche Muster durchsucht

Beschleunigung der Suche durch Indexierung (Suchindex)

Vorgehensweise bei

- Information Retrieval-Systemen zur Verwaltung von Dokumentkollektionen
- Volltext-Datenbanksystemen
- Web-Suchmaschinen etc.

Indexvarianten

- (Präfix-) B*-Bäume
- Tries, z.B. Radix oder PATRICIA Tries
- Suffix-Bäume
- Invertierte Listen
- Signatur-Dateien

Suffix-Bäume I

Suffix-Bäume: Digitalbäume, die alle Suffixe einer Zeichenkette bzw. eines Textes repräsentieren

Unterstütze Operationen:

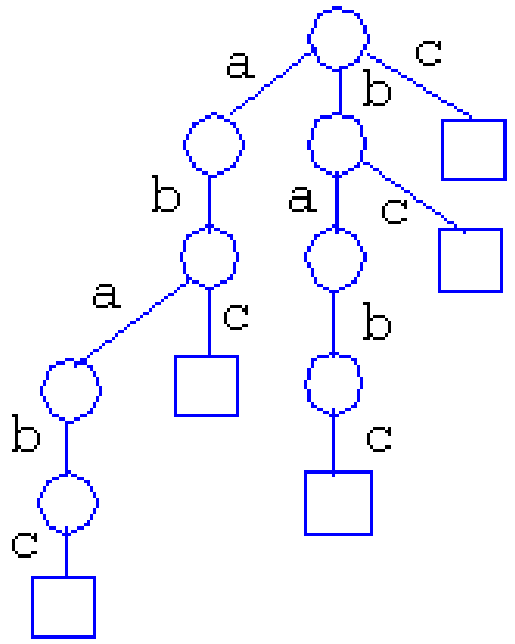
- Teilwortsuche: in O(m)
- Präfix-Suche: Bestimmung aller Positionen, an denen Worte mit einem Präfix p auftreten
- Bereichssuche: Bestimmung aller Positionen von Worten, die in der lexikographischen Ordnung zwischen zwei Grenzen p1 und p2 liegen

Suffix-Tries basierend auf Tries

- hoher Platzbedarf für Suffix-Tries $O(n^2)$ -> Kompaktierung durch Suffix-Bäume

Text: ababc

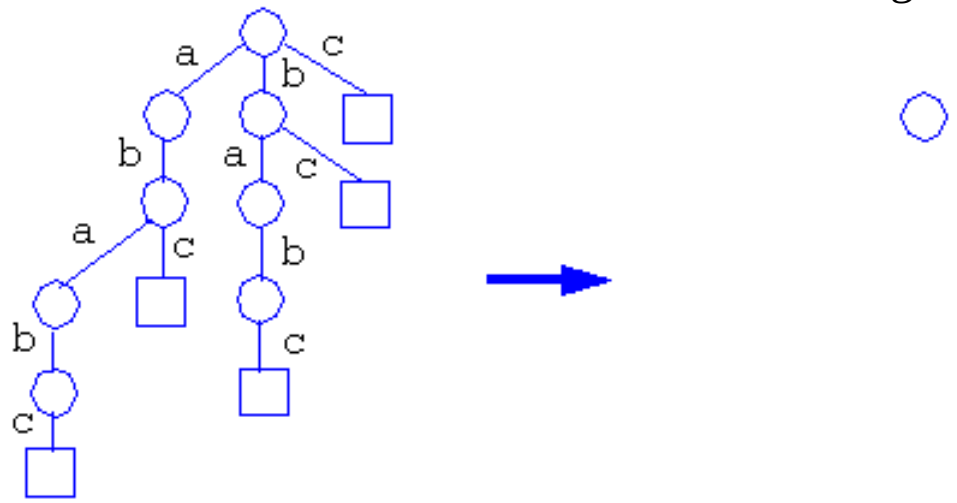
5 Suffixe: ababc
babc
abc
bc
c



Kontraktion von Suffix-Bäumen

Alle Wege im Trie, die nur aus unären Knoten bestehen, werden zusammengezogen

Text: ababc
Suffixe: ababc
babc
abc
bc
c



Eigenschaften für Suffix-Baum S

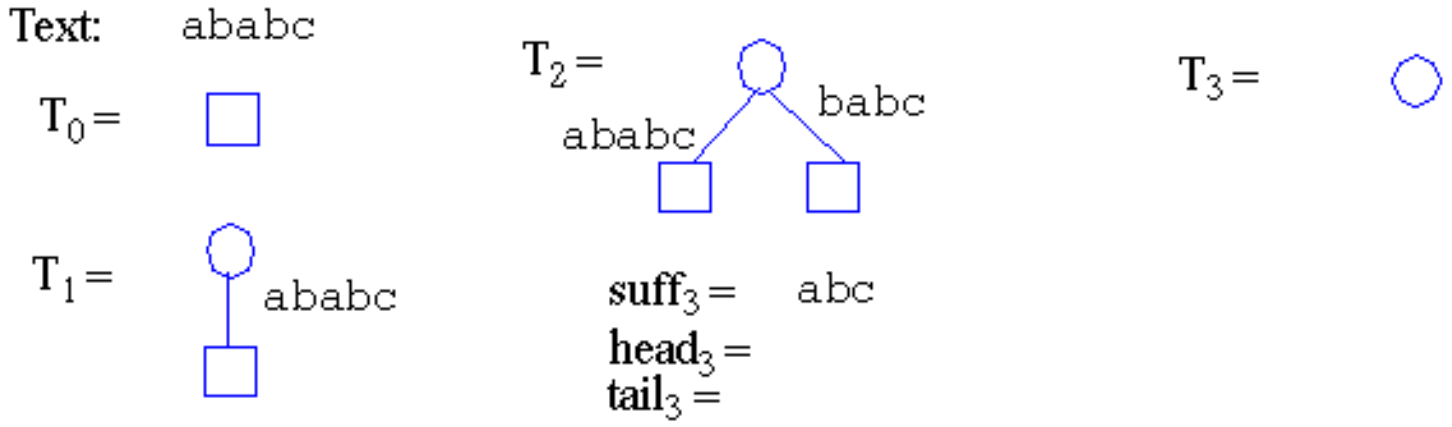
- jede Kante in S repräsentiert nicht-leeres Teilwort des Eingabetextes T
- die Teilworte von T, die benachbarten Kanten in S zugeordnet sind, beginnen mit verschiedenen Buchstaben
- jeder innerer Knoten von S (außer der Wurzel) hat wenigstens zwei Söhne
- jedes Blatt repräsentiert ein nicht-leeres Suffix von T

Linearer Platzbedarf O(n): n Blätter und höchstens n-1 innere Knoten

Konstruktion von Suffix-Bäumen

Vorgehensweise bei Konstruktion

- beginnend mit leerem Baum T_0 wird pro Schritt Suffix $suff_i$ beginnend an Textposition i eingefügt und Suffix-Baum T_{i-1} nach T_i erweitert
- zur Einfügung ist $head_i$ zu bestimmen, d.h. längstes Präfix von $suff_i$, das bereits im Baum präsent ist, d.h. das bereits Präfix von $suff_j$ ist (j < i)



naiver Algorithmus: $O(n^2)$

linearer Aufwand O(n) gemäß Konstruktionsalgorithmus von McCreight

- Einführung von Suffix-Zeigern
- Einzelheiten siehe Ottmann/Widmayer (2001)