Algorithmen und Datenstrukturen 2

Sommersemester 2007
5. Vorlesung

Peter F. Stadler

Universität Leipzig
Institut für Informatik
studla@bioinf.uni-leipzig.de

Wdhlg.: Dijkstra-Algorithmus I

Bestimmung der von einem Knoten ausgehenden kürzesten Wege
- gegeben: kanten-bewerteter Graph G = (V,E, g) mit g: E -> R+ (Kantengewichte)
- Startknoten s; zu jedem Knoten u wird die Distanz zu Startknoten s in D[u] geführt
- Q sei Prioritäts-Warteschlange (sortierte Liste); Priorität = Distanzwert
- Funktion succ(u) liefert die Menge der direkten Nachfolger von u

- Verallgemeinerung der Breitensuche (gewichtete Entfernung)
- funktioniert nur bei nicht-negativen Gewichten
- Optimierung gemäß Greedy-Prinzip

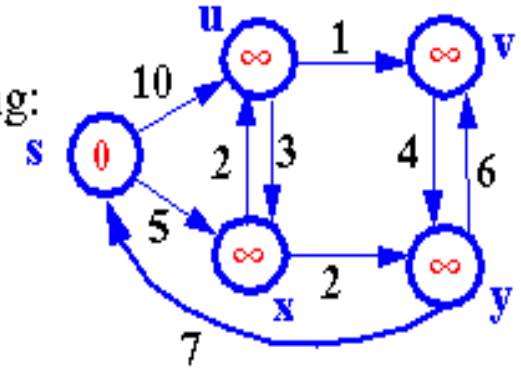
Wdhlg.: Dijkstra-Algorithmus II

Dijkstra (G,s):

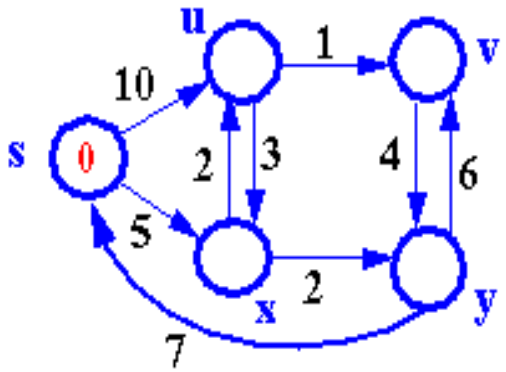
```
for each Knoten v ∈ V - s do { D[v] = ∞;};
D[s] = 0; PriorityQueue Q = V;
while not isEmpty(Q) do { v = extractMinimum(Q);
        for each u ∈ succ (v) ∩ Q do {
                if D[v] + g ((v,u)) < D[u] then
                        { D[u] = D[v] + g ((v,u));
                         adjustiere Q an neuen Wert D[u]; };
        };
}
```

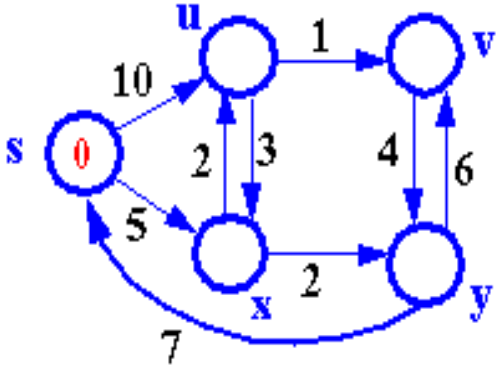
Dijkstra-Algorithmus: Beispiel

Initialisierung:



$Q = <(s:0), (u:\infty), (v:\infty), (x:\infty), (y:\infty)>$





Dijkstra-Algorithmus: Korrektheit

Korrektheitsbeweis

- nach i Schleifendurchgängen sind die Längen von i Knoten, die am nächsten an s liegen, korrekt berechnet und diese Knoten sind aus Q entfernt.
- Induktionsanfang: s wird gewählt, D(s) = 0
- Induktionsschritt: Nimm an, v wird aus Q genommen. Der kürzeste Pfad zu v gehe über direkten Vorgänger v' von v. Da v' näher an s liegt, ist v' nach Induktionsvoraussetzung mit richtiger Länge D(v') bereits entfernt. Da der kürzeste Weg zu v die Länge D(v') + g((v',v)) hat und dieser Wert bei Entfernen von v' bereits v zugewiesen wurde, wird v mit der richtigen Länge entfernt.
- erfordert nichtnegative Kantengewichte (steigende Länge durch hinzugenommene Kanten)

Dijkstra-Algorithmus: Eigenschaften

Komplexität <= $O(n^2)$

- n-maliges Durchlaufen der äußeren Schleife liefert Faktor O(n)
- innere Schleife: Auffinden des Minimums begrenzt durch O(n), ebenso das Aufsuchen der Nachbarn von v

Pfade bilden aufspannenden Baum (der die Wegstrecken von s aus gesehen minimiert)

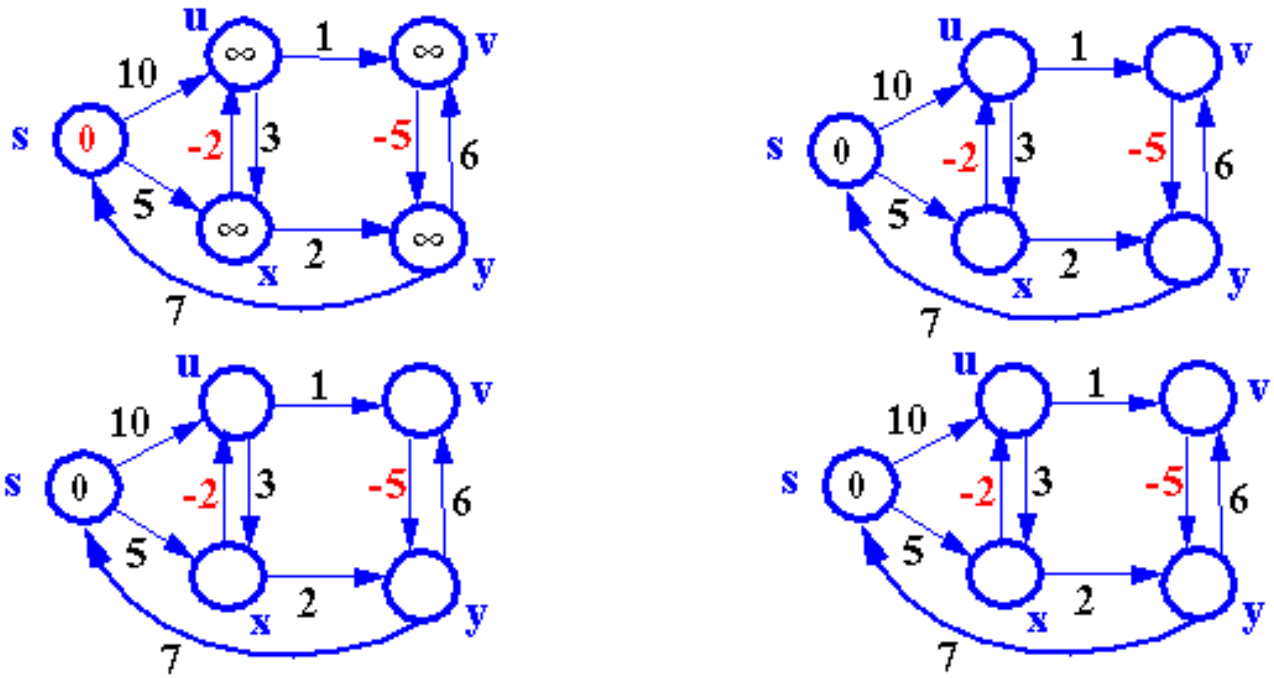
Bestimmung des kürzesten Weges zwischen u und v: Spezialfall für Dijkstra-Algorithmus mit Start-Knoten u (Beendigung sobald v aus Q entfernt wird)

Kürzeste Wege mit negativen Kantengewichten (ohne negative Zyklen)

Bellmann-Ford-Algorithmus BF(G,s):

```
for each Knoten v ∈ V - s do { D[v] = ∞; }; D[s] = 0;
for i = 1 to |V|-1 do
    for each (u,v) ∈ E do {
        if D[u] + g((u,v)) < D[v] then D[v] = D[u] + g((u,v));
    }
```

Beispiel:



Minimale Spannbäume I

Problemstellung: zu zusammenhängendem Graph soll Spannbaum (aufspannender Baum) mit minimalem Kantengewicht (minimale Gesamtlänge) bestimmt werden

- relevant z.B. zur Reduzierung von Leitungskosten in Versorgungsnetzen

Minimale Spannbäume II

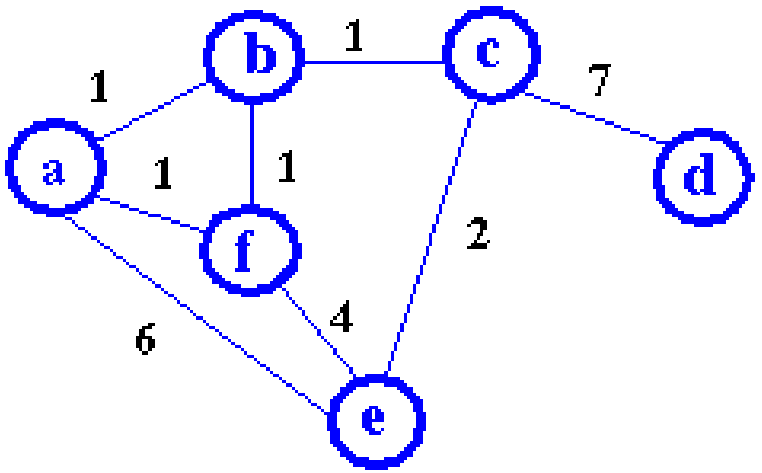
Kruskal-Algorithmus (1956)

- Sei G = (V, E, g) mit g: E -> R (Kantengewichte) gegebener ungerichteter, zusammenhängender Graph.

  Zu bestimmen minimaler Spannbaum T = (V, E')

- E' = {}; sortiere E nach Kantengewicht und bringe die Kanten in PriorityQueue Q; jeder Knoten v bilde eigenen Spannbaum(-Kandidat)

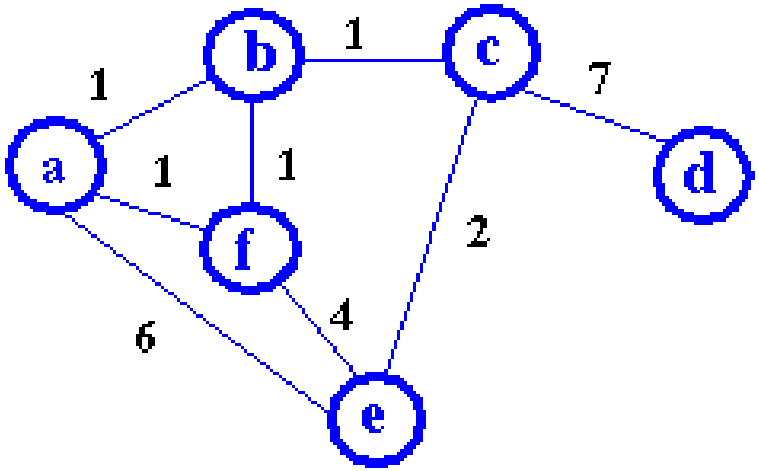
- solange Q nicht leer:
  - entferne erstes Element e = (u,v)
  - wenn beide Endknoten u und v im selben Spannbaum sind, verwerfe e, ansonsten nehme e in E' auf und fasse die Spannbäume von u und v zusammen



Minimale Spannbäume II

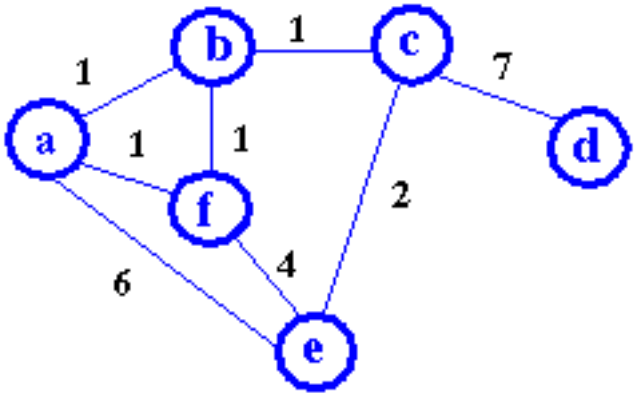
Analog: Bestimmung maximaler Spannbäume (absteigende Sortierung)

Anwendung des Kruskal-Algorithmus



Komplexität O(m log n)

Minimale Spannbäume III



Alternative Berechnung (Dijkstra)

- Startknoten s
- Knotenmenge B enthält bereits abgearbeitete Knoten

s = an Kante mit minimalem Gewicht beteiligter Knoten
B={ s }; E' = { };
while |B| < |V| do {
wähle (u,v) ∈ E mit minimalem Gewicht mit u ∈ B, v ∉ B;
füge (u,v) zu E' hinzu;
füge v zu B hinzu; }

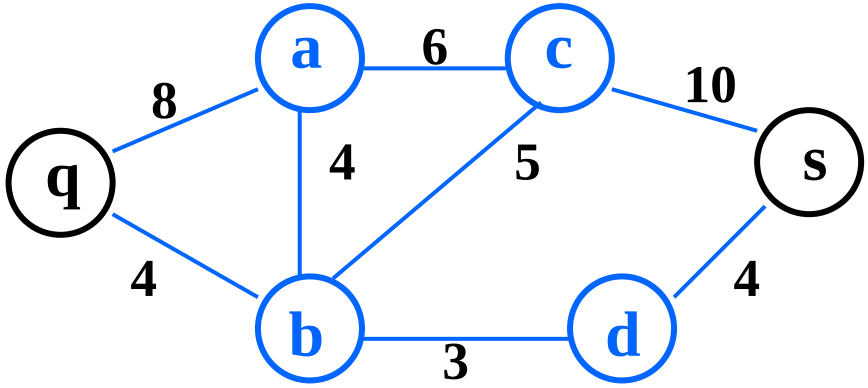
Es wird nur 1 Spannbaum erzeugt

Effiziente Implementierbarkeit mit PriorityQueue über Kantengewicht

Flüsse in Netzwerken I

Anwendungsprobleme:

- Wieviel Autos können durch ein Straßennetz fahren?
- Wieviel Abwasser fasst ein Kanalnetz?
- Wieviel Strom kann durch ein Leitungsnetz fließen?



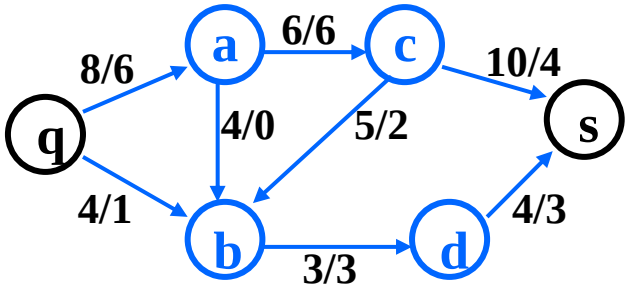
Kantenmarkierung:
Kapazität c(e)

Flüsse in Netzwerken II

- Ein (Fluß-) Netzwerk ist ein gerichteter Graph G = (V, E, c) mit ausgezeichneten Knoten q (Quelle) und s (Senke), sowie einer Kapazitätsfunktion c: E -> Z^+.

- Ein Fluß für das Netzwerk ist eine Funktion f: E -> Z, so daß gilt:

- Kapazitätsbeschränkung: $f(e) \leq c(e)$, für alle e in E.
- Flußerhaltung: für alle v in V \ {q,s}: $\Sigma_{(v',v) \in E} f((v',v)) = \Sigma_{(v,v') \in E} f((v,v'))$
- Der Wert von f, w(f), ist die Summe der Flußwerte der die Quelle q verlassenden Kanten: $\Sigma_{(q,v) \in E} f((q,v))$



Kantenmarkierung:
Kapazität c(e) / Fluß f(e)

Flüsse in Netzwerken III

Gesucht: Fluß mit maximalem Wert

- begrenzt durch Summe der aus q wegführenden bzw. in s eingehenden Kapazitäten
- jeder weitere "Schnitt" durch den Graphen, der q und s trennt, begrenzt max. Fluss

Schnitt (A, B) eines Fluß-Netzwerks ist eine Zerlegung von V in disjunkte Teilmengen A und B, so daß $q \in A$ und $s \in B$.

- Die Kapazität des Schnitts ist $c(A,B) = \Sigma_{u \in A, v \in B} c((u,v))$
- minimaler Schnitt (minimal cut): Schnitt mit kleinster Kapazität

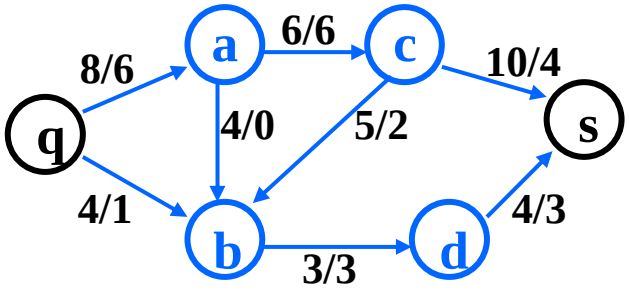
Restgraph

Sei f ein zulässiger Fluß für G = (V, E, c). Sei E' = {(v,w) | (v,w) ∈ E oder (w,v) ∈ E}

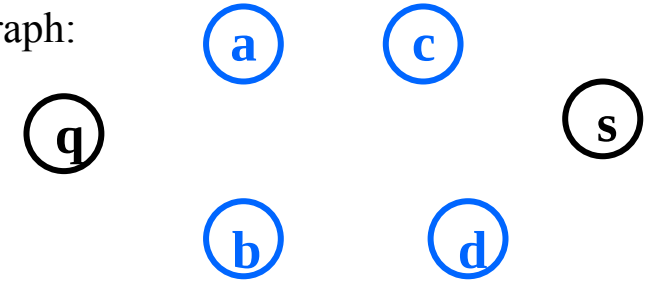
- Wir definieren die Restkapazität einer Kante e = (v,w) wie folgt:

$$\text{rest}(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{falls } e \in E \\ f((w,v)) & \text{falls } (w,v) \in E \end{cases}$$

- Der Restgraph von f (bzgl. G) besteht aus den Kanten e ∈ E', für die rest(e) > 0



Restgraph:

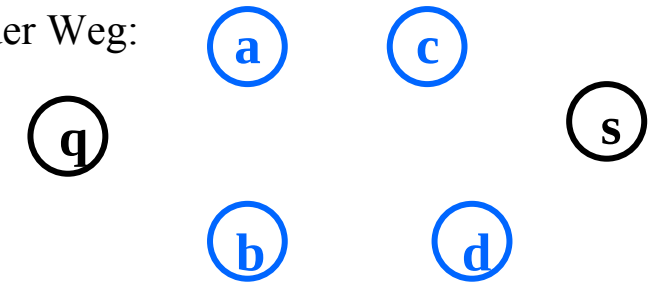


Kantenmarkierung: rest(e)

Zunehmender Weg

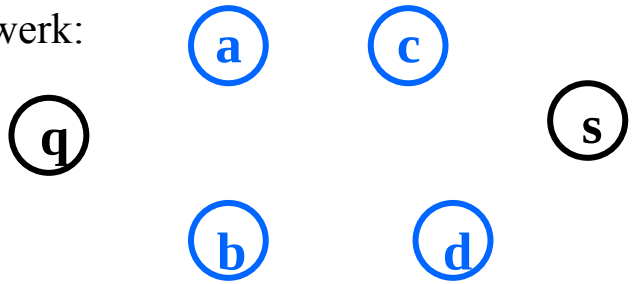
- Jeder gerichtete Pfad von q nach s im Restgraphen heißt zunehmender Weg.

zunehmender Weg:



- Optimierung des Flusses für G:
  - entlang des zunehmenden Weges q
  - um min(rest(e)) mit e liegt auf q

Optimiertes Netzwerk:



Min-Cut-Max-Flow-Theorem

Theorem (Min-Cut-Max-Flow-Theorem):

Sei f zulässiger Fluß für G. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) f ist maximaler Fluß in G.
2) Der Restgraph von f enthält keinen zunehmenden Weg.
3) w(f) = c(A,B) für einen Schnitt (A,B) von G.

Ford-Fulkerson-Algorithmus

Ford-Fulkerson-Algorithmus

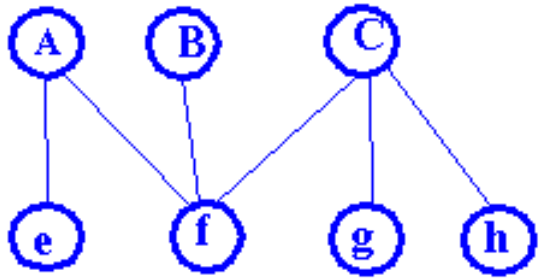
- füge solange zunehmende Wege zum Gesamtfluß hinzu wie möglich
- Kapazität erhöht sich jeweils um Minimum der verfügbaren Restkapazität der einzelnen Kanten des zunehmenden Weges

```
for each e ∈ E { f(e) = 0; }
while (es gibt zunehmenden Weg p im Restgraphen von G)
{
   r = min(rest(e) | e liegt auf p);
   for each e = (v,w) auf p
   {
      if (e ∈ E)   f(e) = f(e) + r;
      else   f((w,v)) = f((w,v)) – r;
   }
}
```

Maximales Matching

Beispiel:

- Eine Gruppe von Erwachsenen und eine Gruppe von Kindern besuchen Disneyland.
- Auf der Achterbahn darf ein Kind jeweils nur in Begleitung eines Erwachsenen fahren.
- Nur Erwachsene/Kinder, die sich kennen, sollen zusammen fahren. Wieviele Kinder können maximal eine Fahrt mitmachen?



Matching

Matching (Zuordnung) M für ungerichteten Graphen G = (V, E) ist eine Teilmenge der Kanten, so daß jeder Knoten in V in höchstens einer Kante vorkommt

- |M| = Größe der Zuordnung
- Perfektes Matching: kein Knoten bleibt "allein" (unmatched), d.h. jeder Knoten ist in einer Kante von M vertreten

Matching M ist maximal, wenn es kein Matching M' gibt mit |M| < |M'|

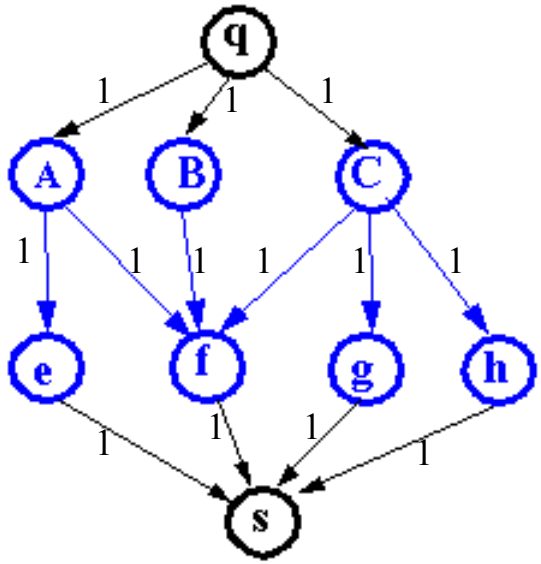
Ein bipartiter Graph ist ein Graph, dessen Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen V1 und V2 aufgeteilt ist, und dessen Kanten jeweils einen Knoten aus V1 mit einem aus V2 verbinden

Matching und maximaler Fluß

Maximales Matching kann auf maximalen Fluß zurückgeführt werden:

- Quelle und Senke hinzufügen.
- Kanten von V1 nach V2 richten.
- Jeder Knoten in V1 erhält eingehende Kante von der Quelle.
- Jeder Knoten in V2 erhält ausgehende Kante zur Senke.
- Alle Kanten erhalten Kapazität c(e) = 1.

→ Anwendung des Ford-Fulkerson-Algorithmus



Kantenmarkierung: Kapazität c(e)

Zusammenfassung I

- **Viele wichtige Informatikprobleme lassen sich mit gerichteten bzw. ungerichteten Graphen behandeln.**

- **wesentliche Implementierungsalternativen: Adjazenzmatrix und Adjazenzlisten**

- **Algorithmen mit linearem Aufwand:**
  - Traversierung von Graphen: Breitensuche vs. Tiefensuche
  - Topologisches Sortieren
  - Test auf Azyklität

Zusammenfassung II

- **Weitere wichtige Algorithmen:**

  - Warshall-Algorithmus zur Bestimmung der transitiven Hülle
  - Dijkstra-Algorithmus bzw. Bellmann-Ford für kürzeste Wege
  - Kruskal-Algorithmus für minimale Spannbäume
  - Ford-Fulkerson-Algorithmus für maximale Flüsse bzw. maximales Matching

  viele NP-vollständige Optimierungsprobleme
  - Traveling Salesman Problem, Cliquenproblem, Färbungsproblem ...
  - Bestimmung eines planaren Graphen (Graph-Darstellung ohne überschneidende Kanten)